This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Это цифровая коиия книги, хранящейся для иотомков на библиотечных иолках, ирежде чем ее отсканировали сотрудники комиании Google в рамках ироекта, цель которого - сделать книги со всего мира достуиными через Интернет.

Прошло достаточно много времени для того, чтобы срок действия авторских ирав на эту книгу истек, и она иерешла в свободный достуи. Книга иереходит в свободный достуи, если на нее не были иоданы авторские ирава или срок действия авторских ирав истек. Переход книги в свободный достуи в разных странах осуществляется ио-разному. Книги, иерешедшие в свободный достуи, это наш ключ к ирошлому, к богатствам истории и культуры, а также к знаниям, которые часто трудно найти.

В этом файле сохранятся все иометки, иримечания и другие заииси, существующие в оригинальном издании, как наиоминание о том долгом иути, который книга ирошла от издателя до библиотеки и в конечном итоге до Вас.

Правила использовапия

Комиания Google гордится тем, что сотрудничает с библиотеками, чтобы иеревести книги, иерешедшие в свободный достуи, в цифровой формат и сделать их широкодостуиными. Книги, иерешедшие в свободный достуи, иринадлежат обществу, а мы лишь хранители этого достояния. Тем не менее, эти книги достаточно дорого стоят, иоэтому, чтобы и в дальнейшем иредоставлять этот ресурс, мы иредириняли некоторые действия, иредотвращающие коммерческое исиользование книг, в том числе установив технические ограничения на автоматические заиросы.

Мы также иросим Вас о следующем.

- Не исиользуйте файлы в коммерческих целях.
  Мы разработали ирограмму Поиск книг Google для всех иользователей, иоэтому исиользуйте эти файлы только в личных, некоммерческих целях.

- Не отиравляйте автоматические заиросы.
  Не отиравляйте в систему Google автоматические заиросы любого вида. Если Вы занимаетесь изучением систем машинного иеревода, оитического расиознавания символов или других областей, где достуи к большому количеству текста может оказаться иолезным, свяжитесь с нами. Для этих целей мы рекомендуем исиользовать материалы, иерешедшие в свободный достуи.

- Не удаляйте атрибуты Google.
  В каждом файле есть "водяной знак" Google. Он иозволяет иользователям узнать об этом ироекте и иомогает им найти доиолнительные материалы ири иомощи ирограммы Поиск книг Google. Не удаляйте его.

- Делайте это законно.
  Независимо от того, что Вы исиользуйте, не забудьте ироверить законность своих действий, за которые Вы несете иолную ответственность. Не думайте, что если книга иерешла в свободный достуи в США, то ее на этом основании могут исиользовать читатели из других стран. Условия для иерехода книги в свободный достуи в разных странах различны, иоэтому нет единых иравил, иозволяющих оиределить, можно ли в оиределенном случае исиользовать оиределенную книгу. Не думайте, что если книга иоявилась в Поиске книг Google, то ее можно исиользовать как угодно и где угодно. Наказание за нарушение авторских ирав может быть очень серьезным.

О программе Поиск кпиг Google

Миссия Google состоит в том, чтобы организовать мировую информацию и сделать ее всесторонне достуиной и иолезной. Программа Поиск книг Google иомогает иользователям найти книги со всего мира, а авторам и издателям - новых читателей. Полнотекстовый иоиск ио этой книге можно выиолнить на странице `http://books.google.com/`

QA
155
M63
1894

Gift of

Joseph J. Smortchevsky

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

B.K.Mlodzjewski

HIGHER ALGEBRA

1898

Russian

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

лекціи профессора

Б. К. МЛОДЗѢЕВСКАГО.

Болеславъ Корнеліевичъ.

Москва

1898.

From the books of
Joseph J. Smortchevsky
Vancouver, B.C., Canada, 1986

Высшая алгебра представляет собою учение объ алгебраическихъ уравненіяхъ. Понятіе объ алгебраическомъ уравненіи настолько часто встрѣчается въ элементахъ алгебры и въ аналитической геометріи, что здѣсь достаточно будетъ только короткихъ указаній.

Мы знаемъ, что при всякой зависимости между двумя величинами одна изъ нихъ представляетъ функцію другой, и функціи дѣлятся на алгебраическія и трансцендентныя. Алгебраическими функціями называютъ функціи, въ которыхъ надъ перемѣнными производятся шесть алгебраическихъ дѣйствій: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возведеніе въ цѣлую и положительную степень и извлеченіе корня цѣлой и положительной степени, при чемъ эти дѣйствія должны повторяться конечное число разъ. Очевидно, что такія же алгебраическія функціи могутъ быть не только отъ одного, но и отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ; напр., первая часть уравненія линіи представляетъ функцію двухъ перемѣнныхъ, двухъ координатъ.

Положимъ, что имѣемъ функцію нѣсколькихъ перемѣнныхъ, которую мы обозначимъ черезъ

$$f(x, y, z, \dots)$$

По мѣрѣ того, какъ перемѣннымъ $x, y, z, \dots$ будемъ давать разныя значенія, функція будетъ принимать все новыя и новыя значенія. Потребуемъ, чтобы она функція равнялась данному числу A.

$$f(x, y, z \dots) = A$$

Тогда, очевидно, $x, y, z \dots$ нельзя только

ных значения, ибо не при всяких значениях переменных наша функция будет равна 0. Такое соотношение, в котором выражается требование, чтобы определенная функция одного или нескольких переменных приобретала известное числовое значение, наз. уравнением. По виду функций ур-ия делятся на алгебраические и трансцендентные; высшая алгебра изучает исключительно алгебраические ур-ия. Всякое уравнение можно привести к такому виду, чтобы во второй части был нуль, так как, что бы во второй части ни стояло, мы можем перенести все в первую часть с обратным знаком; при этом ясно, что если ур-ие было алгебраическим, то и останется алгебраическим, и если оно было трансцендентным, то и останется трансцендентным. Следовательно, мы можем сказать, что общий вид ур-ия есть:

$$f(x, y, z, \dots) = 0.$$

Рассмотрим ур-ие с одним неизвестным

$$f(x) = 0.$$

Ясно, что единственное, чем мы можем здесь распоряжаться, есть переменное x. Найти те значения переменного, при которых ур-ие обращается в тождество, значит решить ур-ие, а самые значения неизвестного, обращающие ур-ие в тождество, суть корни ур-ия.

Если мы теперь имеем ур-ие с двумя неизвестными:

$$f(x, y) = 0,$$

то ясно, что мы можем одному из неизвест-

нам давать любое значение, напр. $y = y'$; тогда у нас будет соотношение:

$$f(x, y) = 0$$

Это есть уравнение с одним неизвестным, которое мы можем решить; если дадим для y другое значение, то для x получим новые решения и т. д.

Таким образом, одно уравнение с двумя неизвестными есть ур-ие неопределенное в том смысле, что ему удовлетворяет бесчисленное множество значений неизвестных. То же будет, разумеется, и еще в большей степени в ур-ии с тремя и более неизвестными. Впоследствии мы докажем, что система ур-ий со многими неизвестными будет система определенная, когда частей столько ур-ий, сколько неизвестных. (Подь системой ур-ий мы разумеем такую совокупность ур-ий, которыя удовлетворяются одновременно одними и теми же значениями неизвестных).

Посмотрим, что можно сказать о возможности решить ур-ие с одним неизвестным $f(x) = 0$, и каково это ур-ие. Можно доказать, что всякое алгебраическое ур-ие может быть освобождено от радикалов; кромѣ того, изъ элементов алгебры извѣстно, что всякое алгебраическое ур-ие можетъ быть освобождено отъ дробей; слѣд., данное ур-ие мы всегда можемъ предполагать освобожденнымъ отъ радикаловъ и отъ дробей, т. е. первую часть этого уравненія мы можемъ предполагать цѣлымъ и раціональнымъ многочленомъ. Поэтому алгебраическія

ское ур-ie съ одним неизвестным мы будемъ писать въ видѣ:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n .$$

Здѣсь a съ указателями суть нѣкоторые коэффициенты; мы пишемъ ихъ съ разными значками, чтобы показать связь ихъ со степенями неизвѣстнаго. Мы видимъ, что сумма показателей и указателей въ каждомъ членѣ одна и та же, такъ что, если дано отдѣльно какой-нибудь коэффиціентъ, то мы сразу можемъ сообразить, къ какому члену онъ относится.

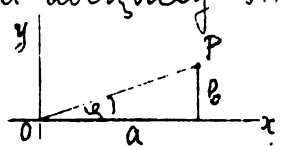
Спросимъ себя, имѣетъ ли ур-ie корень и, если имѣетъ, то сколько. Если говорить о корняхъ, то нельзя останавливаться въ предѣлахъ дѣйствительныхъ корней. Мы знаемъ, напр., что въ квадратномъ ур-и есть случаи, когда мы должны сказать, что данное ур-ie рѣшенія не имѣетъ, или ввести новое количество $\sqrt{-1}$, опредѣляемое тѣмъ условіемъ, что $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$. Мы вводимъ этотъ символъ, чтобы и въ этомъ случаѣ имѣть возможность говорить о корняхъ ур-ia. Этотъ символъ мы будемъ обозначать буквой i, и слѣд. корень квадратный изъ -1 будетъ имѣть два значенія: $\pm i$. Тогда самое общее число будетъ состоять изъ соединенія дѣйствительной и мнимой части, такъ что если черезъ a и b обозначимъ дѣйствительныя части, то самое общее число будетъ $a + bi$. Такое число наз. комплексным, т.е. сложнымъ. Можно показать, что всѣ алгебраическія дѣйствія надъ комплексными числами дадутъ комплексныя величины.

Разъ мы признали необходимымъ введеніе ком-

плексного числа, то и самое ур-ие может быть обобщено; именно, нет надобности полагать, что коэффициенты ур-ия суть действительные числа; мы будем полагать, что коэффициенты ур-ия суть не действительные числа, а комплексные; понятно, что мы делаем тут обобщение: если мнимые части положим равными нулю, то получим действительные числа. Одно из основных предложений высшей алгебры и заключается в том, что всякое алгебраическое ур-ие, коэффициенты которого могут быть и комплексными числами, имеет по крайней мере один действительный или комплексный корень.

Геометрическое представление комплексных чисел.

Тогда как действительное число может быть изображено на прямой линии, комплексное число должно быть изображено на плоскости; условимся считать a и b за координаты некоторой точки P на плоскости (черт. 1), при чем a примем за абсциссу этой точки, а b за ординату. Тогда точка P будет геометрическим образом нашего комплексного числа. Наоборот, раз точка P дана, то известны a и b, а следовательно будет известно и комплексное число $a + bi$. Из этого следует, что действительным количествам соответствует ось X, ибо, если наше число есть a, то $b = 0$, и значит точка находится на оси X; наоборот,



Черт. 1

мнимым количествам соответствуют точки на оси y, так как, если данное число есть bi, то $a=0$ и следовательно точка находится на оси y. Преобразуем Декартовы координаты в полярные; тогда будем иметь

$$a = \rho \cos\varphi \,, \quad b = \rho \cdot \sin\varphi \,,$$

и следовательно наше комплексное число $a+bi$ представится в виде

$$a + bi = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi) \,.$$

Этот вид наз. нормальным видом комплексного числа. Понятно, что по данным a и b, ρ и φ легко определяются из чертежа или прямо из предыдущих формул; именно:

$$\rho = +\sqrt{a^2+b^2} \,; \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \,; \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

($\sqrt{a^2+b^2}$ мы берем с положительным знаком, так как ρ есть величина существенно положительная). Количество ρ наз. модулем комплексной величины, и мы видим, что если комплексное число дано, то его модуль определяется вполне; угол φ наз. амплитудой или аргументом. Мы видим, что если дано комплексное число, то определяется не сама амплитуда, а ее Sinus и Cosinus, и значит амплитуда определяется не вполне, так как, если мы нашли для φ какой-нибудь угол, то Sinus и Cosinus этого угла не изменятся, если прибавим к нему или вычтем из него целое число окружностей. Следовательно, наше комплексное число имеет амплитуду

$$\varphi \pm 2k\pi \,,$$

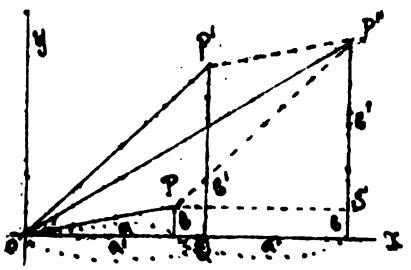
где k есть какое угодно целое число.

Действия над комплексными величинами.

Сложение и вычитание. Если мы имеем два комплексных числа $a+bi$ и $a'+b'i$, то сумма их будет

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+i(b+b').$$

Посмотрим, как это представится на чертеже. Пусть точка P представляет первое слагаемое и P' – второе (черт. 2). Чтобы построить сумму данных чисел, очевидно, надо приложить к отрезку a отрезок a' и к отрезку b отрезок b'.



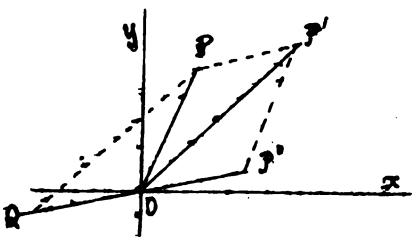
Черт. 2.

Тогда мы получим точку P'' с координатами $a+a'$ и $b+b'$. Дополним наш чертеж построением модулей и амплитуд слагаемых и суммы. Если теперь соединим точки P и P' с точкой P'' и проведем прямую PS параллельно оси x, то получим треугольник $OP'a$ равный треугольнику $PP''S$, так как катеты обоих треугольников представляют собою действительную и мнимую части 2-го слагаемого. Отсюда следует, что $PP''=OP'$, следовательно фигура $OPP''P'$ есть параллелограмм, и OP'' есть одна из диагоналей этого параллелограмма. Таким образом, модуль суммы представляется по величине и направлению диагональю параллелограмма, построенного на модулях слагаемых, и

мы видим, что правило сложения комплексных величин такое же, как и правило сложения сил, скоростей и т. п.; такое сложение в отличие отъ алгебраического называется геометрическим. Можно обойтись и безъ параллелограмма и разсматривать треугольникъ; тогда модуль суммы будетъ изображаться третьей стороной треугольника, соединяющей концы тѣхъ сторонъ, которыми изображаются модули слагаемыхъ. Такъ какъ эта сторона менѣе суммы двухъ остальныхъ сторонъ и болѣе ихъ разности, то отсюда слѣдуетъ, что <u>модуль суммы менѣе (или равенъ) суммы модулей слагаемыхъ и болѣе или равенъ ихъ разности.</u>

При нахожденіи разности модулей дѣло сводится къ построенію параллелограмма по діагонали и одной изъ сторонъ или къ построенію треугольника по двумъ сторонамъ. Такъ какъ разность двухъ сторонъ треугольника менѣе 3-ей стороны, то <u>модуль разности ≥ разности модулей</u>.

Замѣчаніе. Вмѣсто того, чтобы вычитать положительную величину, можно придавать отрицательную; слѣдовательно, если точка P' изображаетъ первое число и P'' — второе, то вмѣсто того, чтобы изъ отрѣзка OP' вычитать отрѣзокъ OP'', мы можемъ къ OP' прибавить отрѣзокъ OQ, равный OP'', но направленный въ противоположную сторону.



Черт. 3.

Въ самомъ дѣлѣ, если къ OP' мы будемъ вычитать OP'', то разность изобразится сторономъ OP параллелограмма $OP''P'P$; если же къ OP' прибавимъ OQ, то сумма изобразится діагональю параллелограмма, построеннаго на OP' и OQ, т.е. тѣмъ же отрѣзкомъ OP.

Умноженіе и дѣленіе. Пусть требуется перемножить 2 комплексныхъ количества $a+bi$ и $a'+b'i$. Представимъ ихъ въ нормальной формѣ:

$$\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \quad \text{и} \quad \rho'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$$

Выполняя умноженіе —

$$\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot\rho'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')=\rho\rho'\left[(\cos\varphi\cdot\cos\varphi'-\sin\varphi\cdot\sin\varphi')+i(\sin\varphi\cdot\cos\varphi'+\cos\varphi\cdot\sin\varphi')\right],$$

находимъ:

$$\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot\rho'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')=\rho\rho'\left[\cos(\varphi+\varphi')+i\sin(\varphi+\varphi')\right] \quad \ldots (\alpha),$$

т.е. <u>произведеніе двухъ комплексныхъ количествъ есть количество тоже комплексное, при чемъ модуль произведенія равенъ произведенію модулей перемножаемыхъ количествъ, а аргументъ произведенія равенъ суммѣ аргументовъ множителей</u>.

Если перемножаются нѣсколько комплексныхъ количествъ (больше двухъ), то составляя послѣдовательно произведеніе перваго на второе, полученнаго на третье, и т.д.; всякій разъ модуля, полученнаго отъ предыдущаго перемноженія мы должны умножать на модуля новаго множителя, а къ аргументу предыдущаго произведенія — прибавлять аргументъ этого новаго множителя. Ясно, что модуль произведенія произвольнаго числа множителей будетъ равенъ произведенію модулей всѣхъ множителей, аргументъ же

его будет представлять алгебраическую сумму аргументов отдельных множителей. Таким образом произведение n множителей:

$\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1);\ \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2);\ \ldots\ \rho_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$,

будет:

$$\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\ldots\rho_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) =$$
$$= \rho_1\rho_2\ldots\rho_n\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)\right] \ldots (\beta)$$

Формально это предложение можно доказать по способу полной индукции:

Допустивъ справедливость этой формулы (β) для n множителей и помноживъ ее на $\rho_{n+1}(\cos\varphi_{n+1} + i\sin\varphi_{n+1})$, мы найдемъ, что она верна и для $n+1$ множителя; но справедливость ея для двухъ множителей доказана съ очевидностью, слѣдовательно, она справедлива и для $2+1=3$ множителей и т.д.

Изъ равенства (α) слѣдуетъ, что <u>при дѣленіи двухъ комплексныхъ количествъ модули дѣлятся и аргументы вычитаются.</u>

Возвышеніе въ цѣлую степень. Формула Моавра.

Принимая въ равенствѣ (β)

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \ldots\ldots = \rho_n = \rho$$
$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots\ldots = \varphi_n = \varphi$$

получимъ:

$$\left[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \ldots\ldots (\gamma).$$

т. е. модуль цѣлой степени комплекснаго количества равенъ степени его модуля, аргументъ степени равенъ аргументу возвышаемаго количества, умноженному на показатель степени.

Если в формуле (6) положить $\varphi = 1$, то получится формула Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \quad \ldots\ldots (I)$$

Заменяя в этом равенстве φ через $-\varphi$, будем иметь:

$$(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi - i\sin n\varphi \quad \ldots\ldots (II).$$

Если сложить почленно эти равенства (I) и (II) и вычесть (II) из (I), то получатся такие соотношения:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n = 2\cos n\varphi \quad \text{и}$$
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n - (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n = 2i\sin n\varphi,$$

которые дают:

$$\cos n\varphi = \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n}{2} \quad \ldots\ldots (A)$$

$$\text{и } \sin n\varphi = \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n - (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n}{2i} \quad \ldots\ldots (B)$$

Пользуясь выведенными формулами (A) и (B) можно Sin. и Cos. кратной дуги выразить через степени Sin и Cos простой дуги, для чего достаточно раскрыть скобки по биному Ньютона. Сделаем это:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots$$

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \ldots$$

Так как возведение в отрицательную степень есть возведение в положительную степень и деление, то предыдущее правило применимо для целых степеней не только положительных, но и отрицательных.

его будетъ представлять алгебраическую сумму аргументовъ остальныхъ множителей. Такимъ образомъ произведеніе n множителей:

$\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1);\ \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2);\ \ldots\ \rho_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$,

будетъ:

$$\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\ldots\rho_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) =$$
$$= \rho_1\rho_2\ldots\rho_n\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)\right] \ldots (\beta)$$

Формально это предложеніе можно доказать по способу полной индукціи:

Допустивъ справедливость этой формулы (β) для n множителей и помноживъ ее на $\rho_{n+1}(\cos\varphi_{n+1} + i\sin\varphi_{n+1})$, мы найдемъ, что она вѣрна и для $n+1$ множителя; но справедливость ея для двухъ множителей доказана съ очевидностью, слѣдовательно, она справедлива и для $2+1=3$ множителей и т.д.

Изъ равенства (α) слѣдуетъ, что <u>при дѣленіи двухъ комплексныхъ количествъ модули дѣлятся и аргументы вычитаются.</u>

Возвышеніе въ цѣлую степень.
Формула Моавра.

Принимая въ равенствѣ (β)

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \ldots\ldots = \rho_n = \rho$$
$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots\ldots = \varphi_n = \varphi$$

получимъ:

$$\left[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \ldots\ldots (\gamma)$$

т. е. модуль цѣлой степени комплекснаго количества равенъ степени его модуля, аргументъ степени равенъ аргументу возвышаемаго количества, умноженному на показатель степени.

Если в формулу (б) положить $\varphi = 1$, то получится формула Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (I).$$

Заменяя в этом равенстве φ через $-\varphi$, будем иметь:

$$(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi - i\sin n\varphi \quad \ldots\ldots (II).$$

Если сложить почленно эти равенства (I) и (II) и вычесть (II) из (I), то получатся такие соотношения:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n = 2\cos n\varphi \quad \text{и}$$
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n - (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n = 2i\sin n\varphi,$$

которые дают:

$$\cos n\varphi = \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n}{2} \quad \ldots\ldots (A)$$

$$\text{и } \sin n\varphi = \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n - (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n}{2i} \quad \ldots\ldots (B)$$

Пользуясь выведенными формулами (А) и (В) можно Sin. и Cos. кратной дуги выразить через степени Sin и Cos простой дуги, для чего достаточно раскрыть скобки по биному Ньютона. Сделаем это:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots$$

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \ldots$$

Так как возведение в отрицательную степень есть возведение в положительную степень и деление, то предыдущее правило применимо для любых степеней не только положительных, но и отрицательных.

Укажем еще на одно свойство комплексных чисел. Положим, что имеем комплексное количество

$$a + bi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Положим теперь, что наше комплексное количество обращается в действительное, т.е. что $b = 0$, и посмотрим, что будет у нас модулем и аргументом. Модуль ρ выражается следующим образом:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2};$$

так как в нашем случае $b = 0$, то ρ обращается в $\sqrt{a^2}$.

$$\rho = \sqrt{a^2}.$$

Но мы не можем сказать, что $\rho = a$, так как a может быть и отрицательно, тогда как ρ всегда положительно. Таким образом, в этом случае ρ не равно a, а равно абсолютной величине a; это обозначают таким образом

$$\rho = |a|.$$

Посмотрим каков будет аргумент. Здесь надо различать два случая: a положительно и a отрицательно. Так как у нас мнимая часть равна нулю, то множитель при i равен 0, и в обоих случаях $\sin\varphi = 0$, но $\cos\varphi$ имеет не одинаковые значения в том и другом случае. В самом деле, так как ρ, как модуль, есть величина существенно положительная, то, если и a положительно, то $\cos\varphi = +1$; во втором случае ρ положительно и равно абсолютной величине a; но a отрицательно, значит ρ надо умножить на -1, чтобы получить a; следовательно $\cos\varphi = -1$.

Посмотрим теперь, каковъ уголъ, Sinus и Cosinus котораго удовлетворяютъ предыдущимъ уравненіямъ. Въ первомъ случаѣ, т.е. при $\sin\varphi = 0$ и $\cos\varphi = 1$, $\varphi = 0$; но такъ какъ Sinus и Cosinus угла не измѣняются, если къ углу прибавляется или вычитается изъ него четное число полуокружностей, то:

$$\varphi = \pm 2k\pi.$$

Наоборотъ, во второмъ случаѣ $\sin\varphi = 0$, а $\cos\varphi = -1$; этимъ условіямъ удовлетворяетъ уголъ равный π; но Sinus и Cosinus угла не измѣнятся, если этотъ уголъ увеличить или уменьшить на четное число полуокружностей; слѣдовательно

$$\varphi = \pi \pm 2k\pi = \pm(2k+1)\pi.$$

Этотъ результатъ формулируется такъ: аргументъ положительнаго числа равенъ четному числу полуокружностей, аргументъ отрицательнаго числа равенъ нечетному числу полуокружностей.

Положимъ, что имѣемъ комплексное число $a + ib$, которое обращается въ нуль. Докажемъ, что это возможно только въ томъ случаѣ, когда числа a и b равны нулю въ отдѣльности, т.е. что комплексное число равно нулю только тогда, когда его дѣйствительная и мнимая части равны нулю въ отдѣльности.

Это видно, во-первыхъ, прямо, такъ какъ дѣйствительная и мнимая части разнородны и уничтожать другъ друга не могутъ; но можно это доказать и съ полною строгостью. Перенесемъ въ ур-іи $a + ib = 0$, ib во вторую часть

$$a = -ib;$$

возведемъ обѣ части въ квадратъ

$$a^2 = -b^2, \text{ или}$$
$$a^2 + b^2 = 0$$

a и b суть числа действительныя; значитъ, если они не нули, то квадраты ихъ существенно положительныя числа, и значитъ сумма этихъ квадратовъ никогда нулемъ быть не можетъ. Отсюда вытекаетъ предложеніе: чтобы комплексное число было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы действительная и мнимая части равнялись нулю въ отдельности. Такъ какъ $a^2 + b^2 = \rho^2$, то отсюда слѣдуетъ, что если комплексная величина есть нуль, то и модуль ея есть нуль, и обратно, если модуль комплексной величины есть нуль, то и сама комплексная величина равна нулю, ибо, если $a^2 + b^2 = 0$, то $a^2 = 0$, $b^2 = 0$, и слѣдовательно $a + bi = 0$. Въ высшей алгебрѣ доказывается, что всякое алгебраическое уравненіе съ действительными или комплексными коэффиціентами, имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ действительный или комплексный корень, т.е. значеніе неизвѣстнаго, которое обращаетъ уравненіе въ тождество.

Теорема Безу и разложеніе многочлена на линейные множители.

Разсмотримъ какой-нибудь многочленъ $f(x)$ и будемъ дѣлить его на разность между перемѣнною x и какимъ-нибудь количествомъ a. Тогда у насъ получится нѣкоторое цѣлое Q и нѣкоторый остатокъ R, такъ что

$$f(x) = (x - a)Q + R.$$

Так как мы делили многочлен, содержащий x, на разность, содержащую также x, то частное будет некоторая функция x; остаток же от x не зависит, так как мы можем продолжать деление до тех пор, пока оно не станет невозможным, т.е. до тех пор, когда старший член остатка будет ниже старшего члена делителя; но старший член делителя 1-ой степени относительно x; значит последний остаток будет нулевой степени относительно x, т.е. не будет зависеть от x. Это замечание даст нам простой способ для определения остатка, не производя деления. Ведь самом деле, так как этот остаток от x не зависит, то какое бы значение мы ни дали переменному x, он будет один и тот же. Дадим для x значение $x = a$; тогда $x-a$, а следовательно и $(x-a)Q$ обратится в нуль, остаток R не изменится, и мы получим:

$$f(a) = R,$$

т.е. <u>остаток от деления многочлена на $x-a$ получается из делимого через замену в нем главной буквы тем значением, которое вычитается из главной буквы в делителе</u>.

Посмотрим теперь, что будет, если a есть корень ур-ия, x_1. По доказанной теореме остаток от деления $f(x)$ на $x-x_1$ есть $R = f(x_1)$; но так как, по предположению, x_1 есть корень нашего ур-ия, то $f(x_1)=0$, и, следовательно,

$$R = f(x_1) = 0.$$

Итак, деление в этом случае выполняется без остатка. Следовательно, <u>всякий многочлен делится без остатка на разность между главной</u>

буквой и корнем этого многочлена, и обратно, если многочлен делится на разность между главной буквой и x, без остатка, то x_1 есть корень многочлена $f(x)$. Замечая это, возьмем многочлен $f(x)$ $n^{ой}$ степени и будем делить его на разность между x и x_1, где x_1 есть корень этого многочлена; так как делимое есть многочлен $n^{ой}$ степени, а делитель $1^{ой}$, то частное, которое мы обозначим через $g(x)$, будет $n-1^{ой}$ степени; остатка не будет, ибо x_1 есть корень $f(x)$; следовательно

$$f(x) = (x - x_1) \cdot g(x) .$$

и наше ур-ие $f(x)=0$ приводится к такому:

$$(x - x_1) \cdot g(x) = 0 .$$

Этому уравнению можно удовлетворить, положив или $x = x_1$ или $g(x)=0$; таким образом наше первоначальное ур-ие распадается на два: $x - x_1 = 0$, $g(x) = 0$. $g(x)$ есть такой же многочлен, как и $f(x)$, только низшей степени; след. и к нему можно приложить теорему о существовании корня; пусть этот корень есть x_2; тогда $g(x_2)=0$. Прилагая к многочлену $g(x)$ такое же разсуждение, как и к многочлену $f(x)$, найдем:

$$g(x) = (x - x_2) \cdot h(x),$$

и если степень $g(x)$ была $n-1$, то степень $h(x)$ равна $n-2$; ур-ие $g(x)=0$ можно заменить следующим ур-ием

$$(x - x_2) \cdot h(x) = 0 ;$$

откуда:

$$\text{или } x = x_2 , \text{ или } h(x) = 0 .$$

Ясно, что $x = x_2$ есть корень не только многочлена $g(x)$, но и $f(x)$, ибо мы видели, что если при каком-нибудь значении x $g(x)$ обращается в нуль, то при

тому же значенію x обращается въ нуль и $f(x)$. Очевидно, мы можемъ разлагать нашъ многочленъ столько разъ, какова степень многочлена, такъ какъ при разложеніи степень постоянно понижается на единицу. Послѣднее частное будетъ a_0 – коэффиціентъ при старшемъ членѣ ур-ія, потому что, выполняя дѣленіе, мы дѣлимъ старшій членъ дѣлимаго на старшій членъ дѣлителя; но коэффиціентъ при старшемъ членѣ дѣлимаго есть a_0, коэффиціентъ при старшемъ членѣ дѣлителя есть 1; слѣдовательно, коэффиціентъ при старшемъ членѣ частнаго будетъ a_0 и т. д. Слѣдовательно, если черезъ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ обозначимъ корни нашего многочлена, то этотъ многочленъ можетъ быть представленъ въ видѣ:

$$f(x) = (x - x_1) \cdot q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot h(x) = \ldots\ldots,$$

или: $$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots\ldots (x - x_n)\, a_0.$$

Это есть тождество, такъ какъ x есть какое угодно количество. Легко видѣть, что числа $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ суть корни ур-ія $f(x) = 0$, ибо, если x дадимъ значеніе равное одному изъ этихъ количествъ, то соотвѣтствующій множитель обратится въ нуль, значитъ и все произведеніе $(x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n) \cdot a_0$, а слѣд. и $f(x)$ обратится въ нуль. Такимъ образомъ, всякій многочленъ равенъ коэф-ту при старшемъ членѣ, умноженному на произведеніе разностей между главной буквой и каждымъ изъ корней этого многочлена.

Отсюда получается рядъ основныхъ заключеній. Прежде всего мы докажемъ, что всякое ур-іе $n^{\text{ой}}$ степени имѣетъ не болѣе n корней. Пусть $x_1, x_2, \ldots x_n$ будутъ n корней нашего многочлена и пусть еще существуетъ нѣкоторое новое значеніе x_{n+1}, кор

рое тоже представляет корень нашего ур-я, так что $f(x_{n+1})=0$. Представим наш многочлен в разложенном виде и вставим в него вместо x x_{n+1}. По предположению результат подстановки будет нуль, и значит один из множителей должен быть равен нулю; но ясно, что ни один из множителей $(x_{n+1}-x_1), (x_{n+1}-x_2), \ldots (x_{n+1}-x_n)$ не равен нулю, ибо ни одно из количеств $x_1, x_2, \ldots x_n$ не равно x_{n+1}, и след. в нуль должен обратиться множитель a_0, а a_0 не может быть нулем, ибо тогда наше ур-ie было бы не $n^{\text{ой}}$ степени, а $n-1^{\text{ой}}$. Очевидно, ур-ie $n^{\text{ой}}$ степени может иметь менее n корней; для этого стоит только предположить, что некоторые из корней равны между собой, ибо, если существуют равные корни, то значит существует менее n значений, удовлетворяющих нашему ур-ию. Но подобно тому, как в квадратном уравнении, когда получается одно значение для неизвестного, мы говорили, что ур-ie имеет не один корень, а два равных корня, так и здесь естественно смотреть на тот случай, когда ур-ie $n^{\text{ой}}$ степени имеет менее n корней, как на случай равных корней. Ясно основание для такой точки зрения: это основание заключается в том, что одному кратному корню будет соответствовать в разложении многочлена несколько множителей, и кратность корня будет измеряться именно числом равных множителей, в которые этот корень входит. Если мы станем на эту точку зрения, т.е. если условимся каждому корню приписывать степень кратности, равную числу соответствующих ему множителей в разложении многочлена, то можем определенно сказать, что всякое

ур-е $n^{ой}$ степени имеет ровно n корней, из которых некоторые могут быть равны между собою.

Зависимость между коэффициентами ур-ия и его корнями.

Положим, что $x_1, x_2, \ldots x_n$ представляют корни ур-ия $n^{ой}$ степени:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Разделим это ур-ие на коэффициент при старшем члене, чтобы при x^n получить единицу:

$$x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0} x^{n-2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_0} x + \frac{a_n}{a_0} = 0$$

Введем следующия обозначения:

$$\frac{a_1}{a_0} = p_1, \quad \frac{a_2}{a_0} = p_2, \quad \ldots\ldots \frac{a_{n-1}}{a_0} = p_{n-1}, \quad \frac{a_n}{a_0} = p_n;$$

тогда наше ур-ие перепишется так:

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0.$$

По доказанному первая часть ур-ия тождественно должна быть равна произведению $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n \equiv (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \quad (1)$$

Раскроем вторую часть равенства. $n^{ная}$ степень x получится умножением всех первых членов разностей $(x-x_1), (x-x_2), \ldots (x-x_n)$, и слд. коэффициент при x^n будет 1. Чтобы получить члены, содержащие x^{n-1}, очевидно надо у всех множителей кроме первого брать x, а у одного первого x_1; затем у всех множителей, кроме второго брать x_1, а у одного второго – x_2 и т. д.; поэтому при x^{n-1} коэффициентами будут последовательно корни $x_1, x_2, \ldots x_n$, но с обратными знаками; слд., член, содержащий x^{n-1}, будет иметь вид:

$$-(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x^{n-1}$$

Для получения членовъ, содержащихъ x^{n-2}, придется брать x изъ всѣхъ множителей, кромѣ двухъ, такъ что коэффиціентомъ при x^{n-2} будетъ сумма всевозможныхъ произведеній всѣхъ корней попарно

$$(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)x^{n-2}$$

Для полученія членовъ, содержащихъ x^{n-3}, надо брать x изъ всѣхъ множителей, кромѣ трехъ, а изъ трехъ множителей — не x, такъ что коэффиціентомъ при x^{n-3} явится сумма всевозможныхъ произведеній изъ n корней по 3; знакъ, очевидно, будетъ —

$$-(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots)x^{n-3}$$

и т. д. Чтобы составить извѣстный членъ, ясно, что изъ всѣхъ множителей надо брать послѣдній членъ; знакъ будетъ +, если число множителей четное и —, если нечетное, такъ что послѣдній членъ будетъ

$$(-1)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_n .$$

Слѣд. тождество (1) приметъ слѣдующій видъ:

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_n =$$

$$= x^n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x^{n-1} + (x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots)x^{n-2} - \ldots + (-1)^n x_1x_2 \ldots x_n .$$

Такъ какъ это тождество, то по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ или изъ непосредственныхъ соображеній убѣждаемся, что коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x равны между собой; отсюда имѣемъ:

$$p_1 = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

$$p_2 = +(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_n = (-1)^n \cdot x_1x_2 \ldots x_n$$

Такимъ образомъ, 1-й коэффиціентъ равенъ — суммѣ всѣхъ корней по одному, 2-й коэффиціентъ равенъ + суммѣ произведеній корней по два, 3-й коэффиціентъ равенъ

- сумме произведений корней по три и т.д. Таким образом, всякий коэффициент равен сумме произведений корней по столько, каков указатель этого коэффициента, при чем эта сумма будет иметь знак + или −, смотря по тому, четное или нечетное число корней входит в состав произведений этой суммы. Здесь важно то обстоятельство, что по отношению к корням предыдущия выражения суть однородныя, именно 1-е выражение 1-го измерения относительно корней, второе выражение - 2-го измерения и т.д., последнее - n-го измерения. Таким образом, измерение каждаго такого однороднаго выражения равно указателю соответствующаго коэффициента.

Легко видеть, что состав каждаго из предыдущих выражений вполне определяется одним членом. Так, напр. x_1 может характеризовать собою первое выражение, так как это выражение состоит из членов, подобных x_1; член x_1x_2 характеризует второе выражение, так как в состав этого выражения входит сумма членов, подобных x_1x_2 и т.д. Таким образом, первый член каждаго выражения мы можем принять за типичный, по образцу которого составляются все остальные. Поэтому сумму всех членов, подобных x_1, т.е. сумму $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n$ мы будем обозначать символом Σx_1; сумму членов, подобных x_1x_2, т.е. сумму $x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n$ мы будем обозначать через Σx_1x_2 и т.д. Сие суть., мы будем иметь:

$$p_1 = -\Sigma x_1$$
$$p_2 = \Sigma x_1x_2$$
$$p_3 = -\Sigma x_1x_2x_3$$

В последнем выражении мы не писали знака Σ, так как произведение $x_1 x_2 \dots x_n$ не имеет себе подобных.

Сопряженность комплексных корней.

Мы до сих пор предполагали, что коэффициенты ур-ия $f(x)=0$ суть действительные, мнимые или комплексные числа и доказали, что всякое такое ур-ие имеет n корней действительных, мнимых или комплексных. Положим теперь, что коэффициенты ур-ия суть действительные числа и посмотрим, нельзя-ли вывести из этого некоторые свойства корней. Оказывается, что если ур-ие имеет действительные коэффициенты, то оно может иметь действительные и комплексные корни, но комплексные корни могут входить не иначе, как попарно сопряженными, т.е. если ур-ие имеет корень $a+ib$, то этому же ур-ию удовлетворяет и число $a-ib$.

Докажем это. Для этого соображаем, что будет, если мы подставим в ур-ие какое угодно комплексное число $a+ib$, где $a+ib$ не есть корень, а какое угодно комплексное число. Так как всякое действие над комплексными числами приводит также к комплексному числу, то результат подстановки числа $a+ib$ даст комплексное число $P+iQ$. Если теперь a и b подберем так, чтобы $a+ib$ было корнем ур-ия, то $P+iQ$ должно равняться нулю, и следов. $P=0$ и $Q=0$. Посмотрим теперь, что будет, если вместо $a+ib$ подставим $a-ib$. Тогда ясно, что результат подстановки будет отличаться от

предыдущего только тем, что i будет замѣнено черезъ $-i$, и если результатъ первой подстановки былъ $P+iQ$, то результатъ новой подстановки будетъ $P-iQ$; но такъ какъ, по предположенію $P=0$ и $Q=0$, то и $P-iQ=0$, и слѣд. $a-ib$ есть также корень нашего ур-ія. Посмотримъ, будетъ ли это въ ур-іи съ комплексными коэффиціентами. Если ур-іе имѣетъ комплексные коэффиціенты, то въ эти коэффиціенты входитъ i. Вставимъ вмѣсто $a+ib$ $a-ib$; тогда результатъ этой подстановки нельзя уже получить изъ прежняго результата $P+iQ$ замѣной i черезъ $-i$, такъ какъ не везде i замѣнено черезъ $-i$; именно, въ корнѣ i замѣнено черезъ $-i$, а въ коэффиціентахъ такой замѣны нѣтъ; слѣд., результатъ подстановки числа $a-ib$ не равенъ $P-iQ$, и значитъ $a-ib$ не служитъ корнемъ нашего ур-ія. Слѣдовательно, если ур-іе съ комплексными коэффиціентами допускаетъ опредѣленный комплексный корень, то сопряженный корень удовлетворяетъ новому ур-ію, коэффиціенты котораго суть числа, сопряженныя съ коэффиціентами перваго ур-ія.

Очевидно, предыдущее предложеніе есть частный случай этого предложенія, такъ какъ, если коэф-ты ур-ія суть дѣйствительныя числа, то они сами съ собой сопряжены.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что если мы имѣемъ ур-іе нечетной степени съ дѣйствительными коэффиціентами, то такъ какъ число всѣхъ корней есть число нечетное, а число комплексныхъ корней необходимо четное, то число дѣйствительныхъ корней есть нечетное; наоборотъ, если имѣемъ ур-е четной степени съ дѣйствительными коэффиціе-

ентами, то такъ какъ число всѣхъ корней есть четное, и число комплексныхъ корней четное, то число дѣйствительныхъ корней равно или нулю или числу четному.

Итакъ, всякое уравненіе нечетной степени съ дѣйствительными коэф-ми имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень; если же степень ур-ія съ дѣйствительными коэффиціентами есть четная, то число дѣйствительныхъ корней равно или нулю или числу четному.

Кратные корни уравненія.

Мы знаемъ, что ур-іе имѣетъ кратные корни, если при разложеніи 1ой части ур-ія на линейные множители окажутся равные множители. Постараемся найти такіе признаки, по которымъ можно узнать, имѣетъ ли ур-іе кратные корни, и, если имѣетъ, то какова кратность корня. Для этого рѣшимъ предварительно слѣдующую задачу.

Положимъ, что имѣемъ два ур-ія $U=0$, $V=0$ и посмотримъ, не имѣютъ ли эти ур-ія общихъ корней. Воспользуемся пріемомъ послѣдовательнаго дѣленія. Положимъ, что степень многочлена U выше степени многочлена V и будемъ дѣлить первый многочленъ на второй; получимъ нѣкоторое частное Q_1 и нѣкоторый остатокъ R_1.

$$U = VQ_1 + R_1.$$

Пусть $x=a$ есть общій корень ур-ій $U=0$ и $V=0$; тогда, если вмѣсто x подставимъ a, то U обратится въ нуль, V – обратится въ нуль, а слѣд. и R_1 обратится въ нуль; это значитъ, что $x=a$ есть корень ур-ія $R_1=0$, и слѣд. R_1 дѣлится безъ остатка

на $x-a$. Таким образом, если два многочлена имеют общий корень, то этот же корень принадлежит и остатку от деления одного многочлена на другой. (Это напоминает известное арифметическое предложение: если делимое и делитель делятся на некоторое число, то и остаток делится на то же число). Будем продолжать деление дальше, именно, разделим делитель V на первый остаток R_1, первый остаток на второй, второй на третий и т. д. Ясно, что деление когда-нибудь кончится, ибо степень остатка все понижается; пусть $m+1^{\text{е}}$ деление будет без остатка; тогда мы будем иметь ряд следующих равенств

$$U = VQ_1 + R_1$$
$$V = R_1Q_2 + R_2$$
$$R_1 = R_2Q_3 + R_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$R_{m-2} = R_{m-1}Q_m + R_m$$
$$R_{m-1} = R_mQ_{m+1}$$

Не трудно видеть, что если ур-ия $U=0$ и $V=0$ имеют общий корень, то эти корни все принадлежат и ур-ию $R_m=0$, и обратно, все корни ур-ия $R_m=0$ суть общие корни ур-ий $U=0$ и $V=0$. В самом деле, мы видели, что если a есть корень U и V, то a есть корень и R_1; если же a служит корнем V и R_1, то оно служит корнем и R_2 и т. д., наконец, если a есть корень R_{m-2} и R_{m-1}, то оно есть корень и R_m. Теперь докажем обратное, именно, что все корни многочлена R_m суть корни U и V. Из последнего равенства видно, что все корни R_m суть корни R_{m-1}; если же R_m и R_{m-1} обращаются в нуль, то обращается в нуль и R_{m-2} и т. д.; если R_1 и V обра-

нулю, то обращается в нуль и U. Таким образом, все общие корни многочленов U и V заключаются в многочлене R_m; но R_m есть общий наибольший делитель многочленов U и V; след., мы можем сказать, что все корни, общие двум многочленам, суть корни и наш общего наибольшего делителя, или, приравнивая общий наибольший делитель нулю, мы получим все корни, общие предложенным двум многочленам. Отсюда следует, что если остаток от деления одного многочлена на другой есть число постоянное, то, приравнивая его нулю, мы не получим ни одного корня, и след. предложенные многочлены не имеют ни одного общего корня; если остаток 1-ой степени, то ур-ия имеют один общий корень, если 2-ой степени — два корня и т. д. Ясно вообще, что два многочлена имеют столько общих корней, какова степень их общего наибольшего делителя.

Воспользуемся этим замечанием для изыскания кратных корней ур-ия. Пусть дано ур-ие $f(x)=0$ и a есть m-кратный корень этого ур-ия. Это значит, что при разложении многочлена $f(x)$ на линейные множители корню a соответствуют m одинаковых множителей; вследствие этого мы можем написать:

$$f(x) = (x-a)^m \cdot \varphi(x),$$

при чем, очевидно, что a не может быть корнем $\varphi(x)$, ибо тогда в многочлен $f(x)$ входила бы еще разность $x-a$, и a было бы корнем не m-ой кратности, а высшей; следовательно:

$$\varphi(a) \neq 0.$$

Возьмем теперь производную по x от обеих

частей предыдущего тождества:

$$f'(x) = m(x-a)^{m-1}\cdot\varphi(x) + (x-a)^m\varphi'(x)$$

или:

$$f'(x) = (x-a)^{m-1}\left[m\varphi(x) + (x-a)\varphi'(x)\right]$$

Посмотрим, не служит ли a корнем ур-ия $f'(x)=0$ и, если служит, то корнем какой кратности. В многочлен $f'(x)$ входит $(x-a)^{m-1}$, так что a наверное есть корень $m-1^{\text{ой}}$ кратности; но a может быть корнем и высшей кратности, если выражение в скобках $m\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)$ обращается в нуль при $x=a$; но это выражение, очевидно, не может обращаться в нуль при $x=a$, ибо по предположению $\varphi(a)\neq 0$.

Итак, <u>всякий кратный корень функции есть вместе с тем корень и ея производной кратности единицею меньшей</u>, так что все однократные корни функции не суть корни ея производной, все двукратные корни функции суть однократные корни производной и т. д. Это позволяет нам отделять кратные корни данной функции; для этого стоит только взять производную от этой функции и найти между данной функцией и ея производной общий наибольший делитель, если нет кратных корней, то этот делитель будет нулевой степени; если есть кратные корни, то все они будут заключаться в общем наибольшем делителе. Посмотрим, как это делается. Пусть наша функция имеет корни простые, двукратные, трехкратные и т. д.

Обозначим произведение всех однократных множителей, входящих в состав данной функции через x_1

$$(x-a_1)(x-b_1)\ldots = x_1$$

произведение двукратных множителей, но взятых по разу, обозначим через x_2

$$(x-a_2)(x-b_2)\ldots\ldots = x_2$$

и т.д. Тогда:

$$f(x) = x_1 . x_2^2 . x_3^3 . x_4^4 \ldots\ldots$$

Составим производную этого многочлена. По сказанному, эта производная будет содержать все множители функции $f(x)$ с кратностью единицею меньшей, следовательно:

$$f'(x) = x_2 . x_3^2 . x_4^3 \ldots\ldots M,$$

где M есть некоторый добавочный множитель. Найдем теперь общий наибольший делитель $f(x)$ и $f'(x)$. Так как корни общего наибольшего делителя двух многочленов суть общие корни этих многочленов, то общий наибольший делитель $f(x)$ и $f'(x)$ будет:

$$\varphi_1(x) = x_2 . x_3^2 . x_4^3 \ldots.$$

Для этого выражения мы вновь составим производную

$$\varphi_1'(x) = x_3 . x_4^2 \ldots\ldots N.$$

Если для $\varphi_1(x)$ и $\varphi_1'(x)$ найдем общий наибольший делитель, то он будет:

$$\varphi_2(x) = x_3 . x_4^2 \ldots\ldots$$

и т.д. Итак, мы получим ряд выражений:

$$f(x) = x_1 . x_2^2 . x_3^3 . x_4^4 \ldots.$$
$$\varphi_1(x) = x_2 . x_3^2 . x_4^3 \ldots\ldots$$
$$\varphi_2(x) = x_3 . x_4^2 \ldots\ldots \quad \text{и т.д.}$$

Будем теперь делить каждое из этих выражений на следующее:

$$\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} = x_1 . x_2 . x_3 . x_4 \ldots\ldots$$

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdots$$

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)} = x_3 \cdot x_4 \cdots$$

$$\frac{f(x)\cdot\varphi_1(x)}{\varphi_2^2(x)} = X_1$$

Таким образом мы выделили группу X_1, содержащую только однократные корни, группу x_2, содержащую только двукратные корни, и т.д., и потому, приравнивая каждую группу нулю, мы получим уравнения:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \ldots$$

которые дадут нам в отдельности простые корни, двукратные, трехкратные и т.д. Итак, если ур-ие имеет кратные корни, то простыми приемами выделения мы можем разбить это ур-ие на отдельные ур-ия, не имеющие кратных корней, из которых и определяются корни какой уточно кратности.

Решение двучленных уравнений.

Под двучленными ур-иями разумеют ур-ия вида:

$$x^n - A = 0.$$

Прежде всего мы покажем, что если найден один из корней такого ур-ия, то все остальные его корни найдутся из решения ур-ия такого же типа с данным A через единицу, т.е. ур-ия $x^n - 1 = 0$. Тогда ясно, что изучение двучленных ур-ий сводится к изучению ур-ий вида $x^n - 1 = 0$. Пусть a есть один из корней ур-ия $x^n - A = 0$, так что

$$a^n - A = 0.$$

Введем новое неизвестное y, именно, положим $x = ay$, где a есть найденный только что корень. Подставив это в ур-ие $x^n - A = 0$, получаем:

$$a^n y^n - A = 0.$$

Но так как a есть корень ур-ия $x^n - A = 0$, то a^n можно заменить через A; след., вынося A за скобку, мы получим:

$$A(y^n - 1) = 0;$$

так как $A \neq 0$, то это приводить нас к ур-ию:

$$y^n - 1 = 0,$$

т.е. к двучленному ур-ию с известным числом 1. Значит, если мы найдем все корни этого ур-ия $y_1, y_2 \ldots y_n$ и умножим их на найденный корень a ур-ия $x^n - A = 0$, то получим все корни этого последнего ур-ия

$$x_1 = ay_1, \quad x_2 = ay_2, \quad \ldots\ldots \quad x_n = ay_n.$$

Из ур-ия $x^n - A = 0$ находим: $x = \sqrt[n]{A}$, откуда заключаем, что корень n-ой степени из какого-нибудь числа имеет n значений.

Займемся изучением свойств уравнения

$$x^n - 1 = 0.$$

Пусть α есть один из корней этого ур-ия; тогда мы тождественно имеем:

$$\alpha^n - 1 = 0.$$

Докажем, что <u>если α есть корень ур-ия $x^n - 1 = 0$, то всякая степень количества α будет также корнем того же ур-ия</u>. В самом деле, возьмем степень α^p, где p есть какое угодно целое число, и убедимся, что эта степень будет также корнем данного ур-ия. Для этого надо вычислить, чему равно $(\alpha^p)^n - 1$. Очевидно, это выражение можно представить так: $(\alpha^n)^p - 1$; но $\alpha^n - 1 = 0$, значит $(\alpha^n)^p - 1 = 0$, т.е. количество α^p есть корень нашего ур-ия. Заметив это, составим ряд чисел: $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\ldots \alpha^m$.

Тогда все эти числа, какъ бы велико m ни было, будутъ корни нашего двучленнаго ур-ія. Но вѣдь всякое ур-іе имѣетъ число корней равное его степени; значитъ въ этомъ рядѣ степеней должны быть равные степени. Положимъ же, что $\alpha^m = \alpha^{m+\kappa}$; тогда на α^m можно сократить, и у насъ получится

$$\alpha^\kappa = 1.$$

Если это такъ, то ясно, что въ предыдущемъ рядѣ только первые κ членовъ будутъ различны. Въ самомъ дѣлѣ, возводя α въ разныя степени, мы будемъ получать разные корни до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до α^κ. Когда мы дойдемъ до α^κ, то α^κ будетъ равно единицѣ, и, умножая α^κ на α, α^2, α^3, ... мы получимъ всѣ предыдущія значенія въ томъ же порядкѣ. Слѣд., намъ надо посмотрѣть только, каково это число κ; если $\kappa = n$, степени уравненія, то мы вернемся къ началу только перейдя n разныхъ значеній, т.е. исчерпавъ всѣ разные корни нашего ур-ія; если $\kappa < n$, то мы вернемся къ началу раньше, чѣмъ обойдемъ всѣ корни, слѣд. мы получимъ не всѣ корни ур-ія и поэтому должны обратиться къ новому количеству, чтобы, возводя его въ разныя степени, получить остальные корни. Отсюда возникаетъ важное понятіе о первообразномъ корнѣ двучленнаго уравненія. Такъ какъ α есть корень нашего ур-ія, то $\alpha^n = 1$; дальше α^κ тоже равно единицѣ: слѣд., если $\kappa < n$, то α есть корень не только предложеннаго ур-ія, но и ур-ія низшей степени $\alpha^\kappa - 1 = 0$. Такой корень двучленнаго ур-ія, который есть вмѣстѣ съ тѣмъ корень двучленнаго ур-ія низшей степени, наз. непервообразнымъ корнемъ. Если же этотъ корень не служитъ никакому

двучленному ур-ию низшей степени, то наз. первообразным. Очевидно, если α есть первообразный корень, то степени α исчерпывают собою весь корни предложенного уравнения. Отсюда видно, как надо решать двучленныя уравнения: надо каким-нибудь способомъ найти одинъ первообразный корень; тогда, возводя его въ послѣдовательныя степени, мы получимъ всѣ остальные корни, и слѣдов. въ отысканіи одного первообразнаго корня рѣшается вся задача.

Мы не станемъ доказывать, что всякое двучленное ур-іе имѣетъ первообразные корни, а посмотримъ, какъ найти такой корень. Для этого покажемъ тригонометрическое рѣшеніе нашей задачи. Перепишемъ ур-іе $x^n - 1 = 0$ въ комплексномъ видѣ. Какъ извѣстно, $+1$ можетъ быть представлена, какъ комплексное число, модуль котораго есть абсолютная величина единицы, а аргументъ какое угодно цѣлое число окружностей; значитъ $1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$, гдѣ k есть какое угодно цѣлое положительное или отрицательное число. x мы также представимъ въ комплексномъ видѣ, именно, обозначимъ его модуль черезъ ρ и аргументъ черезъ ϑ:

$$x = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta).$$

Подберемъ ρ и ϑ такъ, чтобы предложенное ур-іе удовлетворялось; для этого надо, чтобы

$$\rho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta) = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi.$$

Если два комплексныхъ числа равны между собой, то ихъ модули и аргументы должны быть равны въ отдѣльности; значитъ:

$$\rho^n = 1, \quad \text{откуда} \quad \rho = 1.$$
$$n\vartheta = 2k\pi, \quad \text{откуда} \quad \vartheta = \frac{2k\pi}{n}.$$

Таким образом мы получаем для нашего двучленного ур-ия следующее решение

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

Легко видеть, что в этой формуле, действительно, заключаются все корни нашего ур-ия, так как, давая k значения 0, 1, 2, ... мы будем получать все разные корни. Но k может иметь бесконечное множество целых значений; спрашивается, каким же образом выделить отсюда n значений. Легко видеть, что когда k дойдет до значения n, то все корни пойдут сначала, другими словами, если для k дадим значения, отличающиеся на n, то они дадут одни и те же решения; значит, если имеем:

$$\cos\frac{2(k+n)\pi}{n} + i\sin\frac{2(k+n)\pi}{n},$$

то это решение будет то же, что и прежнее

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

Действительно, раскрывая скобки, получаем:

$$\cos\frac{2(k+n)\pi}{n} + i\sin\frac{2(k+n)\pi}{n} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

Таким образом, увеличивая число окружностей на n, мы не получаем новых решений; следовательно, достаточно давать для k значения от 1 до n; этим все решения исчерпываются. Посмотрим, как убедиться в справедливости того, что если какое-нибудь количество есть корень двучленного уравнения, то и целая его степень есть корень того же ур-ия. Для этого надо

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

возвести в какую-нибудь степень и доказать, что эта степень будет корнем ур-ия. Въ самомъ дѣлѣ, возводя корень $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ въ степень p, мы будемъ имѣть:

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^p = \cos\frac{2kp\pi}{n} + i\sin\frac{2kp\pi}{n}$$

Легко видѣть, что полученное выраженіе служитъ корнемъ нашего ур-ія, ибо, возводя его въ степень n, получаемъ:

$$\left[\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^p\right]^n = \cos 2kp\pi + i\sin 2kp\pi = 1.$$

Итакъ, всякая степень корня есть также корень. Теперь легко усмотрѣть, какіе изъ этихъ корней первообразные. Положимъ, что у насъ есть корень

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad \ldots\ldots (1).$$

Если это есть корень не первообразный, то онъ долженъ обращаться въ единицу, когда мы возведемъ его въ степень $m < n$. Если можно найти такую степень $m < n$, возведя въ которую мы получимъ 1, то корень не есть первообразный; если же такого числа нѣтъ, то корень будетъ первообразнымъ, ибо онъ не будетъ служить корнемъ ур-ія низшей степени. Пусть, возведя нашъ корень въ степень m, мы получимъ единицу:

$$\cos\frac{2km\pi}{n} + i\sin\frac{2km\pi}{n} = 1;$$

слѣд. $\cos\frac{2km\pi}{n} = 1$, $\sin\frac{2km\pi}{n} = 0$, и слѣд., уголъ $\frac{2km\pi}{n}$ равенъ цѣлому числу окружностей

$$\frac{2km\pi}{n} = 2k'\pi,$$

гдѣ k' есть цѣлое число, или

$$\frac{km}{n} = k'.$$

Если дробь равна цѣлому числу, то числитель этой дроби долженъ быть кратнымъ знаменателю; значитъ k и n должны содержать общіе множители, ибо въ m они всѣ входить не могутъ, такъ какъ $m<n$. Отсюда мы видимъ, что для того, чтобы выраженіе

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

было не первообразнымъ корнемъ двучленнаго ур-ія, надо, чтобы k не было взаимно простое съ n, ибо только въ этомъ случаѣ возможно равенство $\frac{km}{n} = k'$. Наоборотъ, легко показать, что если k и n не имѣютъ общихъ множителей, то такое равенство невозможно, и слѣд. корень есть первообразный. Въ самомъ дѣлѣ, если k и n не имѣютъ общихъ множителей, то дробь $\frac{km}{n}$ при $m<n$ цѣлымъ числомъ быть не можетъ. Отсюда заключаемъ, что каждое двучленное ур-іе вида $x^n-1=0$ имѣетъ столько первообразныхъ корней, сколько есть чиселъ меньшихъ n и взаимно-простыхъ съ нимъ, потому что каждый такой первообразный корень получается, если k давать значеніе меньшее n и взаимно простое съ n.

Насъ будетъ интересовать это въ частности для ур-ій 3-ей и 4-ой степени. Для трехъ есть два числа меньшихъ его и взаимно простыхъ съ нимъ, именно 1 и 2; для четырехъ есть также два такихъ числа: 1 и 3. Такимъ образомъ, двучленныя ур-ія 3-ей и 4-ой степени имѣютъ по два первообразныхъ корня. Эти корни мы сейчасъ укажемъ. Разсмотримъ кубическое уравненіе

$$x^3 - p = 0.$$

Тогда:

$$x = \cos\frac{2k\pi}{2} + i\sin\frac{2k\pi}{2}$$

Первый корень α_0 получится, если к k дадим значение 0; тогда $\alpha_0 = 1$. Так как 0 не есть число взаимно простое с числом 3, то $\alpha_0 = 1$ не есть первообразный корень. Дадим значение $k = 1$; тогда:

$$\alpha_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Наконец, если дадим значение $k = 2$, то получим:

$$\alpha_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

По сейчас доказанному $\alpha_2 = \alpha_1^3$, и наоборот $\alpha_1 = \alpha_2^2$, ибо α_1 и α_2 суть первообразные корни нашего ур-ия, что не трудно проверить.

Возьмем то же самое для ур-ия 4-ой степени:

$$x^4 - 1 = 0.$$

Решение будет:

$$x = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}$$

Будем составлять корни. Полагая $k = 1$, находим:

$$\alpha_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$$

Так как 1 и 4 числа взаимно простые, то $\alpha_1 = i$ есть корень первообразный. Полагая $k = 2$, получаем:

$$\alpha_2 = \cos\frac{2\pi}{2} + i\sin\frac{2\pi}{2} = -1.$$

Так как числа 2 и 4 суть числа взаимно кратные, то $\alpha_2 = -1$ есть не первообразный корень. Корень α_2 мы получим, если возведем в квадрат первообразный корень α_1; действительно, $i^2 = -1$. Далее,

$$\alpha_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

и по сказанному $\alpha_3 = \alpha_1^3$. Очевидно, α_3 есть первообраз-

ный корень. Наконецъ:

$$\alpha_4 = \alpha_0 = \cos\frac{4\pi}{2} + i\sin\frac{4\pi}{2} = 1 = \alpha_1^4.$$

Такъ какъ кромѣ α_1 у насъ есть еще первообразный корень α_3, то всѣ корни нашего ур-ія можно представить, какъ степени α_3. Въ самомъ дѣлѣ

$$\alpha_1 = \alpha_3^3, \quad \alpha_2 = \alpha_3^2, \quad \alpha_4 = \alpha_3^4.$$

Возвратимся къ тому случаю, когда извѣстный членъ двучленнаго ур-ія не равенъ единицѣ. Пусть имѣемъ уравненіе

$$x^n - A = 0.$$

Представимъ A въ комплексномъ видѣ

$$A = r\left[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)\right]:$$

неизвѣстное x попрежнему обозначимъ такимъ образомъ:

$$x = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

Тогда у насъ получится

$$\rho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta) = r\left[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)\right]$$

Сравнивая модули и аргументы, находимъ:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \qquad \vartheta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

слѣдовательно:

$$x = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

Давая k всевозможныя цѣлыя значенія отъ 1 до n, мы получимъ n корней нашего ур-ія, и этимъ, слѣдовательно, рѣшенъ вопросъ о тригонометрическомъ рѣшеніи двучленныхъ ур-ій и въ томъ случаѣ, когда извѣстный членъ не равенъ единицѣ.

Покажемъ, что справедливо наше прежнее утвержденіе: надо знать только одинъ корень двучленнаго ур-ія; тогда, умножая его на корни ур-ія $x^{n-1} = 0$, мы получимъ всѣ корни даннаго ур-ія.

Дадимъ числу k два разныхъ значенія k и k'; тогда будемъ имѣть: $k' > k$

$$x_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

$$x_2 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k'\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k'\pi}{n}\right)$$

Раздѣлимъ 2-е выраженіе на 1-е; тогда получимъ:

$$\frac{x_2}{x_1} = \cos\frac{2(k'-k)\pi}{n} + i\sin\frac{2(k'-k)\pi}{n}$$

Вторая часть этого равенства представляетъ, очевидно, $\sqrt[n]{1}$, корень двучленнаго ур-ія $x^n - 1 = 0$, такъ какъ въ числителѣ есть 2π, умноженное на цѣлое число $k'-k$, а въ знаменатель n; значитъ, если этотъ корень обозначимъ черезъ α, то у насъ будетъ

$$\frac{x_2}{x_1} = \alpha \quad , \text{ или } x_2 = \alpha x_1 .$$

Такимъ образомъ, дѣйствительно, всякій корень двучленнаго уравненія

$$x^n - A = 0$$

получается изъ одного какого нибудь корня умноженіемъ его на α, гдѣ α есть корень уравненія

$$x^n - 1 = 0 .$$

Алгебраическое рѣшеніе уравненій.

Алгебраическое рѣшеніе уравненій есть рѣшеніе уравненій въ общемъ видѣ; оно даетъ общія формулы, рѣшающія ур-ія. Для ур-ій 1-й и 2-й степени рѣшенія мы имѣемъ въ элементахъ; теперь мы должны составить такія же формулы для уравненій высшихъ степеней.

Решение уравнений 3-ей степени.
Способ Hudde.

Рассмотрим уравнение:

$$x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0$$

Прежде чем приступить к решению этого ур-ия, мы можем несколько упростить его, уничтожив коэффициент при втором члене. Для этого введем вместо x новое неизвестное, положив

$$x = y - \frac{p_1}{3}$$

Этот способ упрощения годится для ур-ия всякой степени: если мы хотим уничтожить второй член от начала, то вместо x берем новое неизвестное, из которого вычитаем коэффициент при втором члене, деленный на степень ур-ия. Внесем предыдущее выражение в наше уравнение

$$\left(y - \frac{p_1}{3}\right)^3 + p_1\left(y - \frac{p_1}{3}\right)^2 + p_2\left(y_1 - \frac{p_2}{3}\right) + p_3 = 0$$

Выпишем члены, содержащие y^3 и y^2; дальнейшие члены нам не нужны

$$y^3 - 3\frac{p_1}{3} y^2 + p_1 y^2.$$

Легко видеть, что члены с y^2 действительно сокращаются. Таким образом, мы достигли того, что член с y^2 устранен и потому, не нарушая общности, мы можем рассматривать такое кубическое ур-ие

$$x^3 + px + q = 0.$$

Разложим теперь неизвестное x на сумму двух величин u и v, при чем одна из них будет функцией другой $\quad x = u + v,$

где v есть функция u, так что здесь не два неизвестных, а одно. Внесем это выражение в наше ур-ие

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0,$$

или

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0,$$

или

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0.$$

Собираем члены, имеющие $u+v$ множителем и члены свободные от этой суммы

$$(u^3+v^3+q) + (u+v)(3uv+p) = 0.$$

До сих пор у нас v было произвольной функцией от u; выберем теперь v так, чтобы $3uv+p=0$; на это мы имеем право, ибо это и значит, что за v мы принимаем определенную функцию от u, именно:

$$v = -\frac{p}{3u} \quad \ldots\ldots\ldots (I).$$

Если мы выберем v так, чтобы это равенство удовлетворялось, то от всего ур-ия остается

$$u^3 + v^3 + q = 0 \quad \ldots\ldots (II)$$

Таким образом, решение одного ур-ия с одним неизвестным x мы привели к решению двух ур-ий с двумя неизвестными u и v; но такое кажущееся осложнение в сущности упрощает дело, так как эта система, как увидим, обладает весьма простым свойством. Свойство это заключается в следующем: мы сейчас же можем исключить одно неизвестное, именно v. Вставим выражение для v в ур-ие (II)

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0;$$

освободим это ур-ие от неизвестного в знаменателе

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Таким образом, вместо ур-ия 3-ей степени мы получили ур-ие 6-ой степени, но зато это уравнение принадлежит къ типу трехчленныхъ ур-ий, а такія ур-ія мы умѣемъ рѣшать; для этого стоитъ только u^3 приравнять новому неизвѣстному z, и дѣло сводится къ рѣшенію квадратнаго уравненія:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,$$

откуда $$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$ и слѣдов.

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Очевидно u имѣетъ 6 значеній, такъ какъ опредѣляется изъ ур-ія 6-ой степени. Спрашивается, какимъ же образомъ помирить это съ тѣмъ обстоятельствомъ, что кубическое ур-ie имѣетъ 3 рѣшенія. Для этого вернемся къ ур-іямъ, связывающимъ u и v:

$$3uv + p = 0$$
$$u^3 + v^3 + q = 0.$$

Ур-ія эти симметричны относительно u и v; слѣд., если бы мы неизвѣстнымъ не v, а u, то для опредѣленія v мы получили бы то же самое ур-ie, которое получили для u; значитъ v будетъ имѣть какъ разъ тѣ же 6 значеній, которыя имѣетъ u; теперь ясно, что если u дадимъ то значеніе, которое раньше имѣло v, то v получитъ то значеніе, которое раньше имѣло u, и такъ какъ $x = u + v$, то x будетъ имѣть только три корня. Теперь надо

рассмотреть, какъ эти корни составляются. Для этого найдемъ выраженіе для v; всего удобнее для этого обратиться къ ур-ію

$$u^3 + v^3 + q = 0.$$

Вставивъ вместо u найденное выраженіе, будетъ имѣть

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + v^3 + q = 0,$$

отсюда

$$v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

и слѣдовательно:

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Эта формула показываетъ намъ, что, дѣйствительно, v выражается такимъ же образомъ, какъ и u, ибо разница въ формулахъ для u и v заключается только въ знакѣ передъ квадратнымъ корнемъ, что не имѣетъ значенія, такъ какъ мы должны брать оба знака. Такъ какъ въ выраженіе для x войдетъ 3 значенія для u и 3 для v, то мы получимъ всѣ значенія для x, если напишемъ:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Если мы сохранимъ не верхніе знаки въ выраженіяхъ для u и v, а нижніе, то первый радикалъ станетъ на мѣсто второго, второй на мѣсто перваго, и слѣд. x будетъ имѣть тѣ же значенія.

Вотъ общее рѣшеніе кубическаго ур-ія. Выведенная формула наз. формулой Кардана. Въ этой формулѣ первый радикалъ имѣетъ три значенія и второй три. Такимъ образомъ, повидимому выходитъ, что, соединяя три значенія перваго радикала

съ тремя значеніями второго, мы должны получить для неизвѣстнаго x 6 значеній. На самомъ же дѣлѣ мы получимъ для x 3 значенія. Дѣйствительно, вспомнимъ зависимость между u и v

$$v = -\frac{p}{3u}.$$

Значитъ, если для u мы возьмемъ любое изъ трехъ значеній, то для v нельзя брать любое изъ трехъ значеній: это значеніе опредѣляется изъ ур-ія $v = -\frac{p}{3u}$. Покажемъ это на слѣдующей схемѣ. Обозначимъ одно изъ значеній $1^{го}$ радикала черезъ A, а $2^{го}$ черезъ B; тогда, если черезъ α обозначимъ первообразный корень двучленнаго ур-ія $x^3 - 1 = 0$, то $1^{й}$ радикалъ будетъ имѣть три такихъ значенія

$$A,\ \alpha A,\ \alpha^2 A.$$

и $2^{й}$ радикалъ будетъ имѣть значенія

$$B,\ \alpha B,\ \alpha^2 B.$$

Положимъ, что первое рѣшеніе есть

$$x_1 = A + B. \qquad \text{I}$$

тогда значитъ $\quad B = -\frac{p}{3u}) = -\frac{p}{3A}.$

Посмотримъ, какой будетъ $2^{й}$ корень. Вмѣсто A возьмемъ αA; тогда вмѣсто B мы должны взять выраженіе $-\frac{p}{3\alpha A}$. Умножая числитель и знаменатель этого выраженія на α^2, мы будемъ имѣть:

$$-\frac{p}{3\alpha A} = -\frac{p\alpha^2}{3\alpha^3 A};$$

но $\alpha^3 = 1$, ибо α есть корень ур-ія $x^3 - 1 = 0$; значитъ:

$$-\frac{p}{3\alpha A} = -\frac{p\alpha^2}{3A} = \alpha^2 B \quad (\text{ибо } -\frac{p}{3A} = B);$$

слѣдовательно: $\quad x_2 = \alpha A + \alpha^2 B.$

Посмотрим, что будет третьим корнем. Вместо A мы должны взять $\alpha^2 A$; тогда вместо B у нас будет $-\frac{p}{3\alpha^2 A}$; умножая на α, получаем:

$$-\frac{p}{3\alpha^2 A} = -\frac{p\alpha}{3\alpha^3 A} = -\frac{p\alpha}{3A} = \alpha B;$$

следовательно

III

$$x_3 = \alpha^2 A + \alpha B.$$

Итак, для корней нашего ур-ия мы имеем выражения:

$$x_1 = A + B$$
$$x_2 = \alpha A + \alpha^2 B$$
$$x_3 = \alpha^2 A + \alpha B.$$

Только эти сочетания из всех девяти и дают три решения. Если под радикалом $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ стоит положительное число, то оба кубичных радикала в выражении для x имеют по одному действительному значению; тогда естественно за первую пару значений A и B принять именно эти два действительных значения.

Исследуем полученные решения. Все дело, разумеется, будет зависеть от квадратного корня $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, так как знак подкоренного количества будет влиять на весь результат.

1) Положим, что подкоренное количество $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ положительно

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0.$$

Тогда наше ур-ие имеет один действительный корень и два мнимых. В самом деле, α есть первообразный корень ур-ия $x^3 - 1 = 0$; следовательно:

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Так как $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$, то под квадратным корнем будет положительное число, след., под первым кубичным корнем и под вторым кубичным корнем будут стоять действительные и разные числа, значит и два кубических корня A и B в первой формуле суть два действительных и разных числа. Может возникнуть вопрос, почему с действительным значением $1^{го}$ кубического корня A соединяется действительное же значение $2^{го}$ кубического корня B, а не комплексное αB или $\alpha^2 B$; это легко уяснить из соотношения $U=-\frac{p}{3V}$; так как для V мы берем действительное значение A, и p есть величина действительная, то и для V мы должны взять действительное значение. Итак, первый корень $x_1=A+B$ есть величина действительная. Посмотрим, каков будет $2^{ой}$ корень:

$$x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}A+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}B=-\frac{A+B}{2}+\frac{i(A-B)\sqrt{3}}{2},$$

т.е. $2^{ой}$ корень есть величина комплексная. Третий корень, разумеется, будет отличаться от второго знаком при мнимой части, ибо эти корни взаимно сопряжены:

$$x_3=-\frac{A+B}{2}-\frac{i(A-B)\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $A\neq B$, то мнимая часть исчезнуть не может, ибо при ней множителем является разность $A-B$. Итак, если $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$, то наряду с одним действительным корнем мы имеем два комплексных сопряженных корня.

2) Положим, что количество под квадратным корнем обращается в нуль:

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0.$$

Тогда оба квадратных корня исчезнут, и так как все дело в том, что в одном выражении этот корень входил со +, а в другом со –, то теперь оба эти выражения сделаются равными: $A = B$; вследствие этого у нас получится

$$x_1 = 2A, \quad x_2 = -A, \quad x_3 = -A.$$

Значит в том случае, если $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, наше ур-ие имеет все корни действительные, причем два из них равны между собой.

3) Положим, что количество, стоящее под квадратным корнем, отрицательно

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$

В этом случае оба кубичных корня суть комплексные числа, ибо под кубичным корнем будет стоять корень квадратный из отрицательного числа, а между тем именно в этом случае все корни ур-ия получаются действительные. Так как здесь под квадратным корнем стоит отрицательное число, то первая подкоренная величина есть комплексная и вторая подкоренная величина есть комплексная, но сопряженная с первой; если же два комплексных числа сопряжены между собой, то и корни из этих чисел будут величинами сопряженными; т.е., если один из кубических корней мы обозначим через

$$A = \gamma + i\beta,$$

то другой кубичный корень будет

$$B = \gamma - i\beta.$$

Эти сопряженные величины мы имеем право связать в один корень, так как $UV = -\frac{p}{3}$, т.е.

произведение uv есть действительное число, а чтобы произведение двух комплексных чисел было действительным числом, надо, чтобы они были сопряжены. Итак, мы имеем:

$$x_1 = A + B = 2\gamma$$

$$x_2 = \alpha A + \alpha^2 B = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(\gamma+i\beta) + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}(\gamma-i\beta) = -\gamma-\beta\sqrt{3}$$

$$x_3 = \alpha^2 A + \alpha B = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}(\gamma+i\beta) + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(\gamma-i\beta) = -\gamma+\beta\sqrt{3}$$

Мы видим, что все три корня в этом случае действительны.

Давая решения для x в радикалах, мы в этом третьем случае дела нисколько не упрощаем, так как в этом случае извлечение кубичного корня столь же затруднительно, как и решение уравнения. Поэтому 3-й случай наз. случаем неприводимым (casus irreducibilis), и мы задачи для этого случая решения в тригонометрической форме.

Представим данные комплексные числа $M+iN$, $M-iN$ и числа $\gamma+i\beta$, $\gamma-i\beta$ в тригонометрической форме:

$$M+iN = R(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$
$$M-iN = R(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)$$
$$A = \gamma+i\beta = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$B = \gamma-i\beta = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

Тогда:

$$x = \sqrt[3]{R(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} + \sqrt[3]{R(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)}$$

$$\gamma+i\beta = \sqrt[3]{R(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и значит

$$\rho = \sqrt[3]{R}, \qquad \varphi = \frac{2k\pi+\vartheta}{3}$$

Полагая $k=0,1,2$, получимъ:

$$x_1 = \sqrt[3]{R}\left(\cos\frac{\alpha}{3} + i\sin\frac{\alpha}{3}\right) + \sqrt[3]{R}\left(\cos\frac{\alpha}{3} - i\sin\frac{\alpha}{3}\right) =$$

$$= x_1 = 2\sqrt[3]{R}\cos\frac{\alpha}{3}.$$

$$x_2 = 2\sqrt[3]{R}\cos\frac{2\pi+\alpha}{3},$$

$$x_3 = 2\sqrt[3]{R}\cos\frac{4\pi+\alpha}{3}$$

или, такъ какъ $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ и $\frac{4\pi}{3} = 240^\circ$

$$x_1 = 2\sqrt[3]{R}\cdot\cos\frac{\alpha}{3}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{R}\left(-\cos\frac{\alpha}{3} - \sin\frac{\alpha}{3}\sqrt{3}\right)$$

$$x_3 = \sqrt[3]{R}\left(-\cos\frac{\alpha}{3} + \sin\frac{\alpha}{3}\sqrt{3}\right)$$

Остается вычислить R и α. Количество

$$M + iN = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

слѣд. дѣйствительная часть $M = -\frac{q}{2}$, а мнимая $iN = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$; слѣд.

$$R\cos\alpha = -\frac{q}{2}$$

$$iR\sin\alpha = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Возведемъ эти выраженія въ квадратъ:

$$R^2\cos^2\alpha = \frac{q^2}{4} \qquad \text{(III)}$$

$$-R^2\sin^2\alpha = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \qquad \text{(IV)}$$

Вычитая, получаемъ $R^2 = -\frac{p^3}{27}$, откуда

$$R = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$$

Не слѣдуетъ удивляться, что здѣсь подъ квадратнымъ корнемъ стоитъ знакъ $-$, ибо въ нашемъ случаѣ $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ и, такъ какъ $\frac{q^2}{4} > 0$, то $\frac{p^3}{27}$ есть коли-

чество отрицательное, и значит подъ квадратнымъ корнемъ будетъ стоять положительное число. Что касается аргумента ϑ, то изъ равенства (III) находимъ $\cos\vartheta$, изъ равенства (IV) $\sin\vartheta$, и такимъ образомъ уголъ ϑ найденъ. Такимъ образомъ, тригонометрически этотъ случай можно довести до конца. ×

Рѣшеніе ур-ій 4ой степени. Способъ Феррари.

Пусть имѣемъ уравненіе:

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

Перенесемъ во вторую часть всѣ члены, кромѣ старшаго

$$x^4 + px^3 = -qx^2 - rx - s.$$

Дополнимъ 1ую часть ур-ія до полнаго квадрата, разсматривая 1ый членъ, какъ квадратъ, и 2ой, какъ удвоенное произведеніе

$$x^4 + px^3 + \frac{p^2}{4}x^2 = \left(\frac{p^2}{4} - q\right)x^2 - rx - s$$

или:

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}x\right)^2 = \left(\frac{p^2}{4} - q\right)x^2 - rx - s.$$

Если бы 2ая часть этого ур-ія была полнымъ квадратомъ, то мы разбили бы наше ур-іе на два квадратныхъ ур-ія. Но, вообще говоря, этого не будетъ; поэтому постараемся преобразовать наше ур-іе, введя произвольное количество, чтобы, распоряжаясь этимъ количествомъ, сдѣлать 2ую часть ур-ія полнымъ квадратомъ. Прибавимъ новое количество y такъ, чтобы въ первой части было $\left(x^2 + \frac{p}{2}x + y\right)^2$ и добавимъ, что надо, во 2ой:

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}x + y\right)^2 = \left(2y + \frac{p^2}{4} - q\right)x^2 + \left(py - r\right)x + \left(y^2 - s\right) \quad \ldots \quad (I)$$

Въ первой части мы имѣемъ трехчленъ 2-ой степени, но уже содержащій произвольное количество y; этимъ произволомъ мы и воспользуемся, чтобы сдѣлать 2-ю часть ур-ія полнымъ квадратомъ относительно x. Чтобы 2-я часть ур-ія была полнымъ квадратомъ, надо чтобы учетверенное произведеніе крайнихъ членовъ равнялось квадрату средняго. Это видно изъ того, что если три члена образуютъ полный квадратъ, то оба корня трехчлена равны между собой, и значитъ дискриминантъ трехчлена равенъ 0, т.е. учетверенное произведеніе крайнихъ членовъ равно квадрату средняго. Это же можно доказать иначе. Пусть имѣемъ трехчленъ $Ax^2 + Bx + C$; посмотримъ, когда онъ равенъ $(\alpha x + \beta)^2$

$$Ax^2 + Bx + C = (\alpha x + \beta)^2$$

Раскрывая и сравнивая коэффиціенты, находимъ:

$$A = \alpha^2; \quad B = 2\alpha\beta; \quad C = \beta^2, \quad \text{отсюда}$$

$$4AC = 4\alpha^2\beta^2; \qquad B^2 = 4\alpha^2\beta^2$$

слѣдовательно:

$$4AC = B^2.$$

Отсюда и видно, что для того, чтобы трехчленъ 2-ой степени представлялъ точный квадратъ, надо, чтобы учетверенное произведеніе крайнихъ членовъ равнялось квадрату средняго. Въ нашемъ случаѣ это будетъ:

$$4\left(y^2 - S\right)\left(2y + \frac{p^2}{4} - q\right) - \left(py - r\right)^2 = 0 \quad \ldots \quad (\text{II})$$

Если раскроемъ это ур-іе, то оно будетъ относительно y 3-ей степени. Итакъ, рѣшеніе нашего уравненія 4-ой степени зависитъ отъ рѣшенія кубичнаго ур-ія относительно y; слѣд., это кубическое ур-іе и есть резольвента для нашего ур-ія 4-ой степени. Положимъ

же, что y подобрано так, что вторая часть ур-ия (I) представляет полный квадрат, слъд. $y = y_1$, где y_1 есть один из корней ур-ия (II). Тогда по предположению 2-я часть ур-ия (I) будет полным квадратом. Посмотрим, как эта 2-я часть напишется:

$$\left(x^2+\frac{p}{2}x+y_1\right)^2=\left[\sqrt{2y_1+\frac{p^2}{4}-q}\cdot x+\frac{py_1-r}{2\sqrt{2y_1+\frac{p^2}{4}-q}}\right]^2,$$

или

$$\left(x^2+\frac{p}{2}x+y_1\right)^2-\left[\sqrt{2y_1+\frac{p^2}{4}-q}\cdot x+\frac{py_1-r}{2\sqrt{2y_1+\frac{p^2}{4}-q}}\right]^2=0$$

Теперь легко видеть, что наше ур-ие 4-ой степени распадается на два квадратных ур-ия, так как 1-я часть нашего ур-ия разлагается на произведение суммы на разность. Таким образом мы получаем два квадратных ур-ия

$$x^2+\frac{p}{2}x+y_1+\sqrt{2y_1+\frac{p^2}{4}-q}\cdot x+\frac{py_1-r}{2\sqrt{2y_1+\frac{p^2}{4}-q}}=0$$

$$x^2+\frac{p}{2}x+y_1-\sqrt{2y_1+\frac{p^2}{4}-q}\cdot x-\frac{py_1-r}{2\sqrt{2y_1+\frac{p^2}{4}-q}}=0$$

Первое ур-ие даст два корня x_1, x_2, второе ур-ие даст также два корня x_3, x_4 и, таким образом, мы получим все 4 корня нашего ур-ия 4-ой степени. Таким образом, решение ур-ия 4-ой степени приведено к решению одного кубичного ур-ия и двух квадратных, при чем въ кубическом ур-ии достаточно найти только один корень, так как мы пользовались только одним из корней этого ур-ия y_1.

Числовое решение уравнений.

Если мы имѣемъ ур-ие не съ буквенными, а числовыми коэффициентами, то мы можемъ искать не

алгебраическую зависимость между коэффициентами и корнями, не выражение корней через коэффициенты, а числовое значение корней. Поэтому мы должны дать приемы, при помощи которых мы в каждом данном случае достаточно точно могли бы найти корни ур-ия. Мы займемся определением только действительных корней. *°

Пределы действительных корней.

Первый вопрос, который придется нам решить, это вопрос о нахождении пределов действительных корней ур-ия, т.е. тех чисел, вне которых не существует действительных корней предложенного ур-ия. Положим, что имеем ур-ие $f(x)=0$. Будем искать верхний предел положительных корней, т.е. такое число, что все положительные корни ур-ия меньше этого числа. Напишем данное ур-ие в раскрытой форме

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0.$$

Старший коэффициент мы всегда можем считать положительным, ибо, если бы он был отрицателен, мы перемножим на знак у всех членов ур-ия. Если все коэффициенты ур-ия положительны, то ясно, что ур-ие положительных корней иметь не может, ибо при подстановке положительных чисел вместо x все члены будут положительны, и сумма их никак равняться не может. Стало, если все коэффициенты ур-ия положительны, то верхний предел корней ур-ия есть нуль. Положим, что какие нибудь из коэффициентов отрицательны; тогда этому ур-ию

могутъ удовлетворять и положительныя числа. Положимъ, что первый отрицательный коэффиціентъ встрѣчается при x^m; пусть нѣкоторые изъ дальнѣйшихъ коэффиціентовъ будутъ тоже отрицательные. Преобразуемъ наше ур-іе слѣдующимъ образомъ: обозначимъ черезъ A наибольшую абсолютную величину всѣхъ отрицательныхъ коэффиціентовъ, начиная съ перваго отрицательнаго. Прибавимъ къ первой части ур-я и вычтемъ изъ нея слѣдующій многочленъ

$$A(x^m + x^{m-1} + \ldots + 1).$$

Если мы прибавимъ, то, соединяясь съ многочленомъ 1ой части ур-ія, этотъ многочленъ дастъ положительные коэффиціенты, ибо A есть наибольшая абсолютная величина въ рядѣ коэффиціентовъ a_{n-m}, $a_{n-m+1} \ldots a_n$. Такимъ образомъ, мы поступимъ такъ: вычтемъ изъ стараго члена многочленъ $A(x^m + x^{m-1} + \ldots + 1)$ и прибавимъ этотъ же многочленъ, тогда получимъ ур-іе

$$a_0 x^n - A(x^m + x^{m-1} + \ldots + 1) + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + (A + a_{n-m}) x^m + (A + a_{n-m+1}) x^{m-1} + \ldots + (A + a_n) = 0,$$

въ которомъ всѣ коэффиціенты, начиная съ a_1, положительны.

Напишемъ это ур-іе въ болѣе короткомъ видѣ:

$$a_0 x^n - A \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1} + a_1 x^{n-1} + \ldots = 0.$$

Такъ какъ сумма всѣхъ членовъ, начиная съ 3го, положительна, то для того, чтобы положительныя значенія x могли удовлетворять этому ур-ію, надо, чтобы первые 2 члена давали отрицательный результатъ, ибо иначе ихъ сумма вмѣстѣ съ дальнѣйшими положительными членами не дастъ нуля. Такимъ

образомъ, мы видимъ, что только эти значенія могутъ быть положительными корнями ур-ія, которыя сдѣлаютъ первые два члена въ предыдущемъ ур-іи отрицательными. Отсюда слѣдуетъ, что мы найдемъ верхній предѣлъ положительныхъ корней, если потребуемъ, чтобы

$$a_0 x^n - A\frac{x^{m+1}-1}{x-1} > 0,$$

ибо, пока $$a_0 x^n - A\frac{x^{m+1}-1}{x-1} < 0,$$

x можетъ быть корнемъ, какъ только x начнетъ удовлетворять неравенству

$$a_0 x^n - A\frac{x^{m+1}-1}{x-1} > 0,$$

то перестаетъ удовлетворять ур-ію. Значитъ, если мы рѣшимъ это неравенство, то найдемъ верхній предѣлъ положительныхъ корней даннаго ур-ія. Для рѣшенія предыдущаго неравенства поступимъ такимъ образомъ: мы можемъ считать $x > 1$, такъ какъ ищемъ предѣлы высокіе; освободимъ неравенство отъ знаменателя:

$$a_0 x^n (x-1) > A(x^{m+1}-1) \quad \ldots \quad (I)$$

Если x удовлетворяетъ этому неравенству, то корнемъ ур-ія быть не можетъ. Очевидно, это неравенство еще усилится, если мы во 2-ой части вычеркнемъ единицу, такъ что, если x будетъ удовлетворять неравенству

$$a_0 x^n (x-1) > A x^{m+1} \quad \ldots \quad (II)$$

то оно подавно будетъ удовлетворять неравенству (I), и значитъ x, удовлетворяющее неравенству (II) не можетъ служить корнемъ ур-ія. Сокращая на x^{m+1}, мы получимъ:

$$a_0 x^{n-m-1}(x-1) > A \quad \ldots\ldots \quad (\text{III})$$

Это неравенство равносильно предыдущему. Очевидно, это неравенство есть следствие такого неравенства

$$a_0 (x-1)^{n-m} > A,$$

ибо, если x удовлетворяет этому последнему неравенству, то удовлетворяет и неравенству (III). Таким образом, если x удовлетворяет последнему неравенству, то удовлетворяет и неравенству (II), а тем более неравенству (I), и слд., не может быть корнем ур-ия. Изъ этого неравенства находимъ:

$$(x-1)^{n-m} > \frac{A}{a_0}, \quad \text{откуда}$$

$$x > 1 + \sqrt[n-m]{\frac{A}{a_0}}$$

Такимъ образомъ x, удовлетворяющее последнему неравенству, не можетъ быть корнемъ предложеннаго ур-ия, и слъд. число

$$1 + \sqrt[n-m]{\frac{A}{a_0}}$$

есть верхній предѣлъ положительныхъ корней даннаго ур-ия въ томъ смыслѣ, что значенія x, большія этого предѣла навѣрное не могутъ быть корнями даннаго уравненія.

Посмотримъ, какъ найти нижній предѣлъ положительныхъ корней. Ясно, что для этого стоитъ только въ предложенномъ ур-ии ввести вмѣсто x обратную величину $x = \frac{1}{y}$. Тогда, если бы оказалось, что y не можетъ быть больше a, то ясно, что $x < \frac{1}{a}$. Такимъ образомъ, $\frac{1}{a}$ будетъ нижнимъ предѣломъ положительныхъ корней. Точно также, если вмѣсто x введемъ величину $x = -y$, то отрицательнымъ значеніямъ x будутъ соотвѣтствовать положительныя значенія y, и, если мы для нахожденія

тельных значений y найдем высший предел, то этот предел, взятый с обратным знаком, будет низший предел отрицательных корней. Наоборот, если положим $x = -\frac{1}{y}$, то найдем высший предел отрицательных корней.

Мы видели, что преобразуя наше 1-ое неравенство, мы все более и более расширяем его пределы; поэтому формула $1 + \sqrt[n-m]{\frac{A}{a_0}}$ неудобна тем, что дает слишком широкие пределы для корней.

Перейдем к разсмотрению другого способа для нахождения пределов действительных корней, который, хотя не дает однообразной формулы, но дает пределы более тесные, чем предыдущий способ. Пусть у нас есть многочлен $f(x)$. Положим, что все старшие члены до m-го положительны, их мы обозначим через $\varphi(x)$, а все последующие члены отрицательны; их мы обозначим через $\psi(x)$, так что:

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

Покажем, что если эта разность остается положительной при некотором значении x, то она будет положительной и при всех больших значениях x. В самом деле, разделим многочлен $\varphi(x) - \psi(x)$ на x^m, где m есть степень старшего члена многочлена $\psi(x)$:

$$\frac{\varphi(x)}{x^m} - \frac{\psi(x)}{x^m}.$$

Легко видеть, что в первой дроби будут только положительные степени x, а во второй только отрицательные. В самом деле, $\varphi(x)$ содержит только члены, степень которых больше m; значит,

при дѣленіи $\varphi(x)$ на x^m мы получимъ только положительныя степени x. Наоборотъ, во второй дроби степень перваго члена $= m$, а степень остальныхъ членовъ менѣе m; слѣд., старшій членъ многочлена $\frac{\psi(x)}{x^m}$ будетъ постояннымъ числомъ, а остальные члены будутъ отрицательныя степени x. Значитъ, если мы x дадимъ положительное значеніе и заставимъ его возрастать, то 1е частное будетъ возрастать, а 2е убывать, и слѣд. разность $\frac{\varphi(x)}{x^m} - \frac{\psi(x)}{x^m}$ будетъ возрастать. Такимъ образомъ, если при нѣкоторомъ опредѣленномъ значеніи x разность

$$\frac{\varphi(x)}{x^m} - \frac{\psi(x)}{x^m} = \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{x^m}$$

положительна, то при возрастаніи x она будетъ оставаться положительной. Но если при $x > 0$ разность $\frac{\varphi(x) - \psi(x)}{x^m}$ будетъ оставаться положительной, то и разность $\varphi(x) - \psi(x)$ будетъ положительна. Поэтому, чтобы получить высшій предѣлъ положительныхъ корней, достаточно подставлять въ разность $\varphi(x) - \psi(x)$ вмѣсто x рядъ возрастающихъ чиселъ, и первое изъ этихъ чиселъ, которое дастъ положительный результатъ, будетъ искомымъ предѣломъ.

Мы разобрали только тотъ случай, когда составъ ур-ія особый: сначала идутъ только положительные члены, а потомъ только отрицательные. Не трудно приложить это и къ общему случаю. Мы всегда можемъ предполагать, что 1й членъ положителенъ. Отдѣлимъ группу положительныхъ членовъ, начиная съ перваго до перваго отрицательнаго; эту группу мы обозначимъ черезъ $\varphi_1(x)$; затѣмъ идемъ отъ 1го отрицательнаго члена до слѣдующаго положитель-

нало; эту группу отрицательных членов мы обозначим через $-\psi_1(x)$; следующая группа положительных членов будет $\varphi_2(x)$, далее пойдет группа отрицательных членов $-\psi_2(x)$ и т. д. Таким образом мы можем написать:

$$f(x) = \left(\varphi_1(x) - \psi_1(x)\right) + \left(\varphi_2(x) - \psi_2(x)\right) + \ldots + \left(\varphi_k(x) - \psi_k(x)\right).$$

По самому закону составления этих членов видно, что у них все коэффициенты положительны, так как все коэффициенты, которые раньше были положительны, вошли в один из многочленов со +, а все коэффициенты, которые раньше были отрицательными, вошли в один из многочленов со −. Далее, все члены расположены здесь по убывающим степеням, ибо мы начинаем группировку со старших членов и последовательно переходим к членам низших степеней. Будем теперь вставлять вместо x все возрастающие числа до тех пор, пока последняя разность $\varphi_k(x) - \psi_k(x)$ не будет положительной; тогда со дальнейшим возрастанием x, она, как мы видели, останется положительной. Найдя это число, мы обращаемся к предпоследней разности; если она будет положительна, то идем дальше; если отрицательна, то увеличиваем значение x до тех пор, пока и предпоследняя разность не сделается положительной. Затем переходим к 3-ей от конца разности; если она будет положительна, то идем дальше; если отрицательна, то увеличиваем значение x до тех пор, пока она не будет положительной. Таким образом, увеличивая значение x все больше и больше, мы доходим до первой разности. Положим, что $x = a$ есть то число, которое и

первую разность обращать въ положительную; тогда всѣ послѣдующія разности, какъ мы видѣли, будутъ также положительны, а значитъ онѣ будутъ положительными и при всѣхъ значеніяхъ x, большихъ a. Отсюда слѣдуетъ, что какъ при $x=a$, такъ и при $x>a$ сумма этихъ разностей нулемъ быть не можетъ, и значитъ никакое число, равное или большее a не можетъ служить корнемъ ур-ія. Такимъ образомъ, $x=a$ есть высшій предѣлъ положительныхъ корней ур-ія, всѣ корни ур-ія удовлетворяютъ неравенству $x<a$, и только въ рядѣ чиселъ, удовлетворяющихъ этому неравенству, мы можемъ искать корни.

3-й способъ — способъ Ньютона. Изъ дифференціальнаго исчисленія извѣстно, что если при нѣкоторомъ значеніи перемѣннаго первая производная функціи положительна, то съ увеличеніемъ значенія перемѣннаго функція растетъ, если же производная отрицательна, то съ увеличеніемъ значенія перемѣннаго функція убываетъ. Положимъ, что имѣемъ цѣлую функцію $n^{\text{ой}}$ степени $f(x)$; составимъ рядъ ея производныхъ:

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\ldots\ldots f^{(n)}(x),$$

при чемъ $f^{(n)}(x)=1.2.3\ldots n.a_0$. Какъ видно, послѣдняя производная положительна; значитъ предшествующая $f^{(n-1)}(x)$ постоянно растетъ съ увеличеніемъ значенія перемѣннаго. Дадимъ x такое положительное значеніе, которое сдѣлало бы производную $f^{(n-1)}(x)$ положительной; тогда эта производная будетъ оставаться положительной и при всѣхъ большихъ значеніяхъ x, ибо она растетъ. Найдя такое значеніе x, при которомъ производная $f^{(n-1)}(x)$ положительна,

подставимъ его въ предшествующую производную; если эта производная будетъ положительна, мы пойдемъ дальше, если отрицательна, то будемъ увеличивать значение x. Увеличивая x, мы добьемся того, что и производная $f^{(n-2)}(x)$ будетъ положительной, и, такъ какъ она растетъ, то будетъ положительной и при всѣхъ бо́льшихъ значеніяхъ x и т. д. Положимъ, что мы дошли до такого значенія x, при которомъ 1-я производная $f'(x)$ положительна; значитъ вся послѣдующія производныя положительны, и значитъ $f'(x)$ все время растетъ. Найдя то значеніе x, при которомъ $f'(x)$ положительна, подставляемъ его въ $f(x)$; если $f(x)$ окажется отрицательной, то увеличиваемъ значеніе x до тѣхъ поръ, пока $f(x)$ не будетъ положительной. Пусть то значеніе x, при которомъ $f(x)$ положительна, есть a. Тогда всѣ корни ур-ія непремѣнно меньше a, такъ какъ при $x=a$ функціи $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... положительны, значитъ при $x>a$ всѣ эти функціи только растутъ, и значитъ при $x=a$ функція $f(x)$ нулемъ быть не можетъ. Такимъ образомъ, $x=a$ есть высшій предѣлъ положительныхъ корней нашего ур-ія.

Применимъ эти три способа къ одному частному примѣру, чтобы судить о томъ, насколько каждый изъ нихъ даетъ широкіе или тѣсные предѣлы. Пусть имѣемъ ур-іе

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 27x + 30 = 0$$

По первому способу мы имѣемъ для положительныхъ корней слѣдующій предѣлъ:

$$x < 1 + \sqrt[n-m]{\frac{A}{a_0}}$$

Но $n=4$, т. есть степень перваго члена съ отрицатель-

мым коэффициентом, т.е. $m = 3$, A есть наибольшая абсолютная величина из всех отрицательных коэффициентов, т.е. $A = 27$ и $a_0 = 1$. Таким образом мы получаем:

$$x < 1 + 27, \text{ или } x < 28.$$

Значит, если наше ур-ие имеет действительные корни, то они меньше 28. Чтобы найти нижний предел отрицательных корней, надо поставить вместо $x = -y$; тогда получаем ур-ие

$$y^4 + 3y^3 + 2y^2 + 27y + 30 = 0.$$

Мы видим, что в этом ур-ии все коэффициенты положительны, след. это ур-ие не может иметь положительных корней и, если оно имеет действительные корни, то все они непременно меньше 0: $y < 0$, и след. $x > 0$. Итак, все действительные корни нашего ур-ия заключены между пределами 0 и 28.

Применим теперь второй способ. Для этого надо $f(x)$ представить в таком виде:

$$f(x) = \left[(x^4) - (3x^3)\right] + \left[(2x^2) - (27x)\right] + 30.$$

Последний член положителен, и отрицательной пары у него нет.

Чтобы вторая разность была положительна, надо, чтобы $2x > 27$, или $x > 14$. Переходя к первой разности и вынося x^3 за скобку, получаем: $x - 3$; эта разность при $x = 14$ положительна, и след. мы можем сказать, что $x < 14$, т.е. что 14 есть верхний предел корней нашего ур-ия.

Применим 3-ий способ. Для этого надо составить ряд производных $f'(x)$, $f''(x)$, ...

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 27x + 30,$$
$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x - 27.$$

$$\frac{1}{2} f''(x) = 6x^2 - 9x + 2$$

$$\frac{1}{6} f'''(x) = 4x - 3.$$

$$\frac{1}{6} f^{IV}(x) = 4.$$

(Мы берем половину $f''(x)$ и шестую часть $f'''(x)$ и $f^{IV}(x)$, так как все это в знаке этих производных, при том или другом значении x, и поэтому их можно множить и делить на положительные числа). Будем постепенно подставлять значения x так, чтобы все эти производные были положительны. Последняя производная положительна; чтобы предыдущая производная была положительна, надо, чтобы $x = 1$. Обращаемся к производной $f'(x)$; при $x = 1$ она отрицательна; поэтому подставим $x = 2$, в результате получим положительное число. Переходим к следующей производной $f'(x)$; значение $x = 2$ делает эту производную отрицательной; положим $x = 3$, получаем результат положительный. Вставляя в $f(x)$ $x = 3$, получаем отрицательный результат; берем поэтому следующее число 4; при $x = 4$ $f(x)$ положителен, и так как все предыдущие функции при $x = 4$ положительны, то с возрастанием x они будут расти и след., ур-ие имеет действительные корни, то все они меньше 4: $x < 4$.

Мы видим, какая большая разница в этих трех способах. По первому способу мы получили для верхнего предела число 28, по второму 14 и третьему 4. Спр., если бы мы пользовались 1 м способом, то нам пришлось бы напрасно искать корни между 28 и 4. ✗

Теорема Штурма.

До сихъ поръ шла рѣчь о томъ, сколько вообще положительныхъ и отрицательныхъ корней имѣетъ ур-іе. Теперь перейдемъ къ вопросу объ отдѣленіи корней, т. е. о нахожденіи такихъ паръ чиселъ, между которыми заключается по одному корню.

Мы начнемъ съ теоремы Штурма. Основаніемъ этой теоремы служитъ слѣдующая лемма:

если мы будемъ разсматривать функцію $f(x)$ и ея производную $f'(x)$ при значеніи x, равномъ корню a уравненія $f(x)=0$, то до перехода x черезъ этотъ корень функція и ея производная имѣютъ разные знаки, а послѣ перехода одинаковые;

значитъ при $x=a-h$, гдѣ h есть достаточно малое количество, $f(x)$ и $f'(x)$ имѣютъ разные знаки, а при $x=a+h$ — одинаковые; другими словами, отношеніе $\frac{f(x)}{f'(x)}$ переходитъ съ $-$ на $+$ не иначе, какъ переходя черезъ нуль.

Разложимъ функцію $f(a+h)$ по теоремѣ Тейлора:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\ldots$$

По предположенію a представляетъ корень нашей функціи; слѣд. $f(a)=0$. Предположимъ для общности, что значеніе a представляетъ корень не только самой функціи, но и ряда ея производныхъ, т. е. что a есть кратный корень функціи. Положимъ, что первая не исчезающая производная есть производная $m^{\text{го}}$ порядка, значитъ:

$$f(a)=0,\quad f'(a)=0,\quad f''(a)=0,\ \ldots\ f^{(m-1)}(a)=0$$

Тогда значитъ наше разложеніе начнется только съ $m^{\text{ой}}$ производной:

$$f(a+h)=\frac{h^m}{1.2\ldots m}f^{(m)}(a)+\frac{h^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)}f^{(m+1)}(a)+\ldots \quad (1).$$

„Высш. алгебра" проф. Млодзѣевскаго. Л. 5.

Лит. Общ. Р. Н.

Возьмем разложение первой производной:

$$f'(a+h) = f'(a) + h f''(a) + \frac{h^2}{1.2} f'''(a) + \dots$$

Вглядываясь в это разложение, мы видим, что при всякой производной степень h менее на единицу степени при h в разложении $f(a+h)$, и так как и тут разложение начнется, очевидно, с $m^{\text{ой}}$ производной, то у нас будет:

$$f'(a+h) = \frac{h^{m-1}}{1.2\dots(m-1)} f^{(m)}(a) + \frac{h^m}{1.2\dots m} f^{(m+1)}(a) + \dots \quad (2)$$

Разделим тождество (1) на (2)

$$\frac{f(a+h)}{f'(a+h)} = \frac{\frac{h^m}{1.2\dots m}\left[f^{(m)}(a) + \frac{h}{m+1} f^{(m+1)}(a) + \frac{h^2}{(m+1)(m+2)} f^{(m+2)}(a) + \dots\right]}{\frac{h^{m-1}}{1.2\dots(m-1)}\left[f^{(m)}(a) + \frac{h}{m} f^{(m+1)}(a) + \frac{h^2}{m(m+1)} f^{(m+2)}(a) + \dots\right]}.$$

Выполним деление:

$$\frac{f(a+h)}{f'(a+h)} = \frac{h}{m} \cdot \frac{f^{(m)}(a) + \frac{h}{m+1} f^{(m+1)}(a) + \frac{h^2}{(m+1)(m+2)} f^{(m+2)}(a) + \dots}{f^{(m)}(a) + \frac{h}{m} f^{(m+1)}(a) + \frac{h^2}{m(m+1)} f^{(m+2)}(a) + \dots}$$

Будем постепенно приближать h к нулю. Мы знаем, что количество h можно сделать настолько малым, что знаки числителя и знаменателя будет совпадать с знаком члена свободного от h; но члены свободные от h имеют знаки одинаковые; след., знак 2ой дроби будет +. Кроме того, прямо видно, что вторая дробь в правой части при достаточно малом h будет как угодно близко подходить к единице, и след. отношение $\frac{f(a+h)}{f'(a+h)}$ будет как угодно близко к $\frac{h}{m}$.

Теперь мы видим, что если h отрицательно, то и отношение $\frac{f(a+h)}{f'(a+h)}$ отрицательно (ибо m есть положительное число), а если h положительно, то и отношение $\frac{f(a+h)}{f'(a+h)}$ положительно. Отсюда и следует наша теорема:

если a есть корень функции $f(x)$, и слъд. отношение $\frac{f(x)}{f'(x)}$ обращается при $x=a$ въ нуль, то до перехода x черезъ a, т.е. при $x=a-h$, отношение $\frac{f(x)}{f'(x)}$ отрицательно; послѣ перехода, т.е. при $x=a+h$, отношение $\frac{f(x)}{f'(x)}$ положительно; другими словами, до перехода x черезъ корень знакъ функции и знакъ ея производной разные, послѣ перехода — одинаковые.

Докажемъ теперь теорему Штурма. Положимъ, что у насъ есть ур-ie $f(x)=0$. Положимъ, что это ур-ie не имѣетъ кратныхъ корней; этого всегда можно достигнуть, ибо мы знаемъ, что кратные корни выдѣляются простымъ дѣленіемъ. Если кратные корни удалены, то функція и ея производная общихъ корней, а слѣд. и общихъ множителей не имѣютъ. Разсмотримъ функціи $f(x)$ и $f'(x)$ и будемъ ихъ обозначать черезъ v и v_1:

$$f(x)=v, \qquad f'(x)=v_1$$

Будемъ дѣлить функцію v на v_1; такъ какъ ихъ общихъ дѣлителей не имѣютъ, то дѣленіе будетъ съ остаткомъ; этотъ остатокъ мы возьмемъ съ обратнымъ знакомъ; слѣд.:

$$v=v_1Q-v_2$$

(такъ какъ v_2 есть остатокъ, взятый съ обратнымъ знакомъ). Будемъ дѣлить дѣлитель v_1 на первый остатокъ v_2:

$$v_1=v_2Q_1-v_3.$$

Мы видимъ, что процессъ, который мы выполняемъ, есть процессъ нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя между v и v_1 съ тою разницею, что остатки мы беремъ съ обратными знаками; слѣдовательно, остатки будутъ тѣ же, но знаки ихъ будутъ перемѣнены. Пусть v_m будетъ общій наибольшій дѣлитель v и v_1. Такъ какъ всѣ общіе корни v и v_1 должны быть корнями и общаго наибольшаго дѣлителя, и такъ какъ v и v_1 не имѣютъ общихъ корней, то значитъ v_m есть число постоянное.

Таким образом, мы будем иметь ряд равенств:

$$v = v_1 Q - v_2$$
$$v_1 = v_2 Q_1 - v_3$$
$$v_2 = v_3 Q_2 - v_4$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$v_{m-2} = v_{m-1} Q_{m-2} - v_m$$
$$v_{m-1} = v_m Q_{m-1}.$$

Полученные остатки вместе с начальной функцией и ее производной носят название функций Штурма.

$$v, v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots v_{m-2}, v_{m-1}, v_m.$$

Обнаружим два свойства функций Штурма, которые нам нужны будут при выводе теоремы:

1) Никакие две соседние функции не могут обращаться в нуль при одном и том же значении переменного, т.е. корни одной функции не могут быть корнями соседней. В самом деле, пусть две соседние функции обращаются в нуль при одном значении переменного $v_{i-1} = 0, \quad v_i = 0$

Мы видим, что

$$v_{i-1} = v_i Q_{i+1} - v_{i+1}.$$

Ясно, что если мы в этом тождестве дадим значение $x = a$, то первый член исчезнет, второй также, а след. и третий; таким образом, мы будем иметь:

$$v_{i+1} = 0.$$

Применяя к следующим функциям найденное нами свойство, мы получим:

$$v_{i+2} = 0, \quad v_{i+3} = 0, \ldots\ldots v_m = 0$$

Но последнего быть не может, ибо v_m есть постоянное число и не равно нулю.

2) Если при каком-нибудь значении x какая-нибудь функция обращается в нуль, то при том же же

значении x две соседние функции справа и слева имеют знаки разные. Въ самомъ дѣлѣ, если въ тождество $v_{i-1} = v_i Q_{i+1} - v_{i+1}$ вставимъ a вместо x, то v_i обратится въ нуль и мы получимъ: $v_{i-1} = -v_{i+1}$, а это и указываетъ, что числовыя значенія v_{i-1} и v_{i+1} равны и противоположны.

Этими двумя свойствами мы и воспользуемся для доказательства самой теоремы. Вставимъ въ рядъ функцій Штурма какое угодно число a. Тогда каждая изъ функцій получитъ опредѣленное числовое значеніе; нѣкоторыя изъ этихъ значеній будутъ положительными, другія отрицательными и нулями. Мы будемъ называть, какъ и прежде, послѣдовательностью тотъ случай, когда посль подстановки два сосѣднія функціи имѣютъ знаки одинаковые, и перемѣною, когда они имѣютъ знаки разные. Теорема Штурма заключается въ слѣдующемъ: число дѣйствительныхъ корней ур-ія, заключенныхъ между предѣлами α и $\beta > \alpha$, въ точности равно числу перемѣнъ, потерянныхъ въ рядѣ функцій Штурма при переходѣ отъ $x = \alpha$ къ $x = \beta$.

Разсмотримъ рядъ функцій Штурма

$$v, v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots v_m.$$

Дадимъ значеніе $x = \alpha$ и будемъ непрерывно увеличивать это значеніе до значенія β; посмотримъ, отъ чего нѣкоторыя перемѣны могутъ возникнуть или исчезнуть. Ясно, что какая-нибудь функція можетъ перемѣнить знакъ не иначе, какъ переходя черезъ нуль; положимъ поэтому, что обращается въ нуль одна изъ промежуточныхъ функцій (послѣдняя v_m не можетъ обратиться въ нуль, потому что она есть постоянное число). Пусть $v_i = 0$, тогда разсмотримъ

ряду функций v_{i-1}, v_i, v_{i+1}.

По доказанному, две соседние функции при одном значении переменного в нуль обращаться не могут; значит, если при $x=a$, $v_i=0$, то $v_{i-1}\neq 0$ и $v_{i+1}\neq 0$, и значит мы можем найти такое малое число h, что в промежутке от $x=a-h$ до $x=a+h$ v_{i-1} и v_{i+1} в нуль не обращаются, и след., знака своего в этом месте не меняют; но при $v_i=0$ функции v_{i-1} и v_{i+1} имеют разные знаки (свойство 2), значит во всем промежутке между $a-h$ и $a+h$ эти функции будут иметь разные знаки. След., до перехода v_i через нуль в ряду v_{i-1}, v_i, v_{i+1} непременно была одна перемена и одна последовательность ($\begin{smallmatrix}+&+&-\\-&+&+\end{smallmatrix}$ или $\begin{smallmatrix}+&-&-\\-&+&+\end{smallmatrix}$), после перехода v_i через нуль знак v_i изменился, а знаки v_{i-1} и v_{i+1} остались те же ($\begin{smallmatrix}+&-&-\\-&+&+\end{smallmatrix}$ или $\begin{smallmatrix}+&+&-\\-&+&+\end{smallmatrix}$); значит, где раньше была перемена, теперь последовательность и наоборот, так что число перемен осталось прежнее. Итак, при переходе через нуль одной из промежуточных функций Штурма число перемен в ряду не меняется.

Другое дело будет, если через нуль проходит первоначальная функция. Так как по предположению функция $f(x)$ кратных корней не имеет, то $f'(x)$ не может обращаться в нуль при тех значениях x, при которых $f(x)=0$; значит, если при $x=a$, $f(x)$ обращается в нуль, то можно указать такое малое h, что между $x=a-h$ и $x=a+h$ $f'(x)$ корней иметь не будет, след., через нуль не перейдет и знака не переменит.

Мы видели, что если a есть корень функции, то до перехода x через a функция и ее производная имеют разные знаки, а после перехода обе они

ковые; значить, при переходе x через корень теряется между $f(x)$ и $f'(x)$ одна перемена. Такимъ образомъ, при переходѣ черезъ нуль одной изъ промежуточныхъ функцій ряда число перемѣнъ въ ряду не измѣняется; но всякій разъ, когда проходитъ черезъ нуль начальная функція, между начальной функціей и ея производной теряется одна перемѣна, и значитъ общее число перемѣнъ при переходѣ отъ $x = \alpha$ къ $x = \beta$ уменьшится на столько, черезъ сколько корней перейдетъ x. Этимъ доказывается теорема Штурма.

Примѣръ. Пусть имѣемъ функцію:

$$v = f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1.$$

Составимъ рядъ функцій Штурма:

$$v_1 = f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 8x - 4.$$

Теперь намъ надо дѣлить v на v_1 и взять остатокъ съ обратнымъ знакомъ. Но мы легко видимъ, что дѣленіе это будетъ дробнымъ; поэтому мы будемъ умножать $f(x)$ на такія числа, чтобы остатокъ былъ цѣлымъ; на это мы имѣемъ право, ибо, когда дѣлимое умножаемъ на какое-нб. положительное число, то и остатокъ множится на положительное же число. Итакъ, умножаемъ v на 4 и дѣлимъ на v_1:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 + 4x^3 - 16x^2 - 16x + 4 & 4x^3 + 3x^2 - 8x - 4 \\ \underline{4x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 4x} & x \mid 1. \end{array}$$

умножаемъ на 4.

$$\begin{array}{l} x^3 - 8x^2 - 12x + 4 \\ 4x^3 - 32x^2 - 48x + 16 \\ \underline{4x^3 + 3x^2 - 8x - 4} \\ -35x^2 - 40x + 20 \end{array}$$

Полученный остатокъ мы должны взять съ обратнымъ знакомъ; этотъ остатокъ имѣетъ множитель 5; поэтому, сокращая на 5, мы получаемъ:

$$v_2 = 7x^2 + 8x - 4.$$

Умножаем теперь v_1 на 7 и делим на v_2:

$$\begin{array}{l|l} 28x^3 + 21x^2 - 56x - 28 & 7x^2 + 8x - 4 \\ \underline{28x^3 + 32x^2 - 16x} & 4x \,|\, -11 \\ -11x^2 - 40x - 28 & \end{array}$$

Умнож. на 7. $-77x^2 - 280x - 196$

$\underline{-77x^2 - 88x + 44}$

$-192x - 240$

Сокращая на 48 и меняя знаки, будем иметь:

$$v_3 = 4x + 5.$$

Умножаем v_2 на 4 и делим на v_3:

$$\begin{array}{l|l} 7x^2 + 8x - 4 & 4x + 5 \\ 28x^2 + 32x - 16 & 7x \,|\, -3 \\ \underline{28x^2 + 35} & \\ -3x - 16 & \\ \text{Умнож. на 4.} \quad -12x - 64 & \\ \underline{-12x - 15} & \\ -49 & \end{array}$$

Делим на 49 и меняя знаки, получаем:

$$v_4 = 1.$$

Итак мы получили ряд функций Штурма:

$$\begin{aligned} v &= x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 \\ v_1 &= 4x^3 + 3x^2 - 8x - 4 \\ v_2 &= 7x^2 + 8x - 4 \\ v_3 &= 4x + 5 \\ v_4 &= 1. \end{aligned}$$

Определим, сколько действительных корней имеет наше ур-ие. Для этого вставим в полученный ряд функций вместо x $-\infty$ и $+\infty$ и сосчитаем число перемен, потерянных в ряде при переходе от $x = -\infty$ к $x = +\infty$. Если x давать бесконечно большое значение,

то знакъ всего многочлена будетъ совпадать съ знакомъ перваго члена. Слѣд., мы получимъ такую таблицу:

	v	v_1	v_2	v_3	v_4
$x=-\infty$	+	−	+	−	+
$x=0$	+	−	−	+	+
$x=+\infty$	+	+	+	+	+

Мы видимъ, что при $x=-\infty$ рядъ функцій Штурма имѣетъ 4 перемѣны, при $x=0$ – двѣ перемѣны и при $x=+\infty$ ни одной. Отсюда слѣдуетъ, что между $-\infty$ и 0 наше ур-іе имѣетъ два корня и между 0 и $+\infty$ также два; другими словами, ур-іе имѣетъ два отрицательныхъ корня и два положительныхъ. Будемъ отдѣлять эти корни; для этого будемъ давать значенія $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, и т.д., пока не исчерпаемъ всѣхъ корней. Тогда у насъ получится:

	v	v_1	v_2	v_3	v_4	число перемѣнъ.
$x=0$	+	−	−	+	+	2
$x=1$	−	−	+	+	+	1
$x=2$	+	+	+	+	+	0

Мы видимъ, что при переходѣ отъ $x=0$ къ $x=1$ теряется одна перемѣна; значитъ, между 0 и 1 находится одинъ корень ур-ія. При переходѣ отъ $x=1$ къ $x=2$ теряется еще одна перемѣна; значитъ, между 1 и 2 находится еще одинъ корень ур-ія. Выше мы видѣли, что наше ур-іе имѣетъ только два положительныхъ корня, и такъ какъ мы уже отдѣлили два такихъ корня, то перейдемъ къ отдѣленію отрицательныхъ корней. Для этого будемъ давать значенія $x=-1$, $x=-2$, $x=-3$, ...; тогда получимъ слѣдующую таблицу:

Поступаем съ болѣе близкимъ къ корню числомъ a_1, такъ же, какъ поступали съ a; тогда будемъ имѣть: $h' = -\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$, и значитъ

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}.$$

Подвигаясь такъ обр. далѣе, мы будемъ находить числа, все болѣе и болѣе приближающіяся къ величинѣ корня. Мы можемъ получать значенія h, которыя будутъ насъ удалять отъ корня, а не приближать къ нему; поэтому въ каждомъ приближеніи надо дѣлать провѣрку.

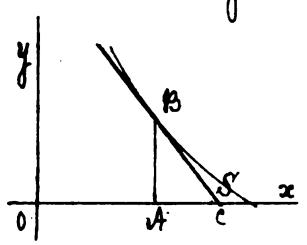
Закончимъ вопросъ геометрическимъ истолкованіемъ этого метода. Положимъ, что имѣемъ ур-іе $y = f(x)$. Это ур-іе представимъ намъ нѣкоторую кривую. Рѣшить ур-іе $f(x) = 0$ значитъ найти такую точку, ордината которой равна нулю, а абсцисса удовлетворяетъ ур-ію $f(x) = 0$. Положимъ, что мы нашли точку $A(a, 0)$ весьма близкую къ искомой. Тогда наша поправка $h = -\frac{f(a)}{f'(a)}$; но $f(a) = y$, $f'(a) = y'$; слѣд:

$$h = -\frac{y}{y'}$$

Проведемъ касательную къ кривой въ той точкѣ, гдѣ приближенная ордината встрѣчаетъ кривую, и вычислимъ длину отрѣзка AC:

$$AC = \frac{AB}{\operatorname{tg} C}.$$

Уголъ C есть уголъ между касательной и осью x, а tg этого угла есть, какъ извѣстно, производная $f'(x)$.



При данномъ расположеніи чертежа ордината кривой съ возрастаніемъ x убываетъ; значитъ производная $f'(x)$ отриц., ибо $f'(x)$ есть tg угла касательной съ осью x, а этотъ уголъ тупой. Слѣд:

$$AC = \frac{AB}{\operatorname{tg} C} = \frac{y}{y'},$$

т.е. наша поправка h есть отрѣзокъ AC, и мы, разсуждая, видимъ, что точка C ближе къ S, чѣмъ точка A. Находя новыя поправки, мы будемъ получать точки все ближе и ближе къ S.

$$\frac{df}{dx}(X-x)+\frac{df}{dy}(Y-y)=0 \quad \dots \quad f(x,y).$$

Длина касательной ... $\dfrac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}$

Дл. подкасательной ... $\dfrac{y}{y'}$.

Нормаль.

$$(X-x)+\frac{dy}{dx}(Y-y)=0 \quad \dots \quad y=f(x)$$

$$\frac{X-x}{\frac{df}{dx}}=\frac{Y-y}{\frac{df}{dy}} \quad \dots \quad f(x,y)=0$$

$$\left\{\begin{aligned}\sin\vartheta &= \frac{dy}{ds}\\ \cos\vartheta &= \frac{dx}{ds}\end{aligned}\right\}$$

Дл. нормали $= y\sqrt{1+y'^2}$

Дл. [illegible] $= yy'$.

выпуклость $y\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$. вогнутость $y\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2}.$$

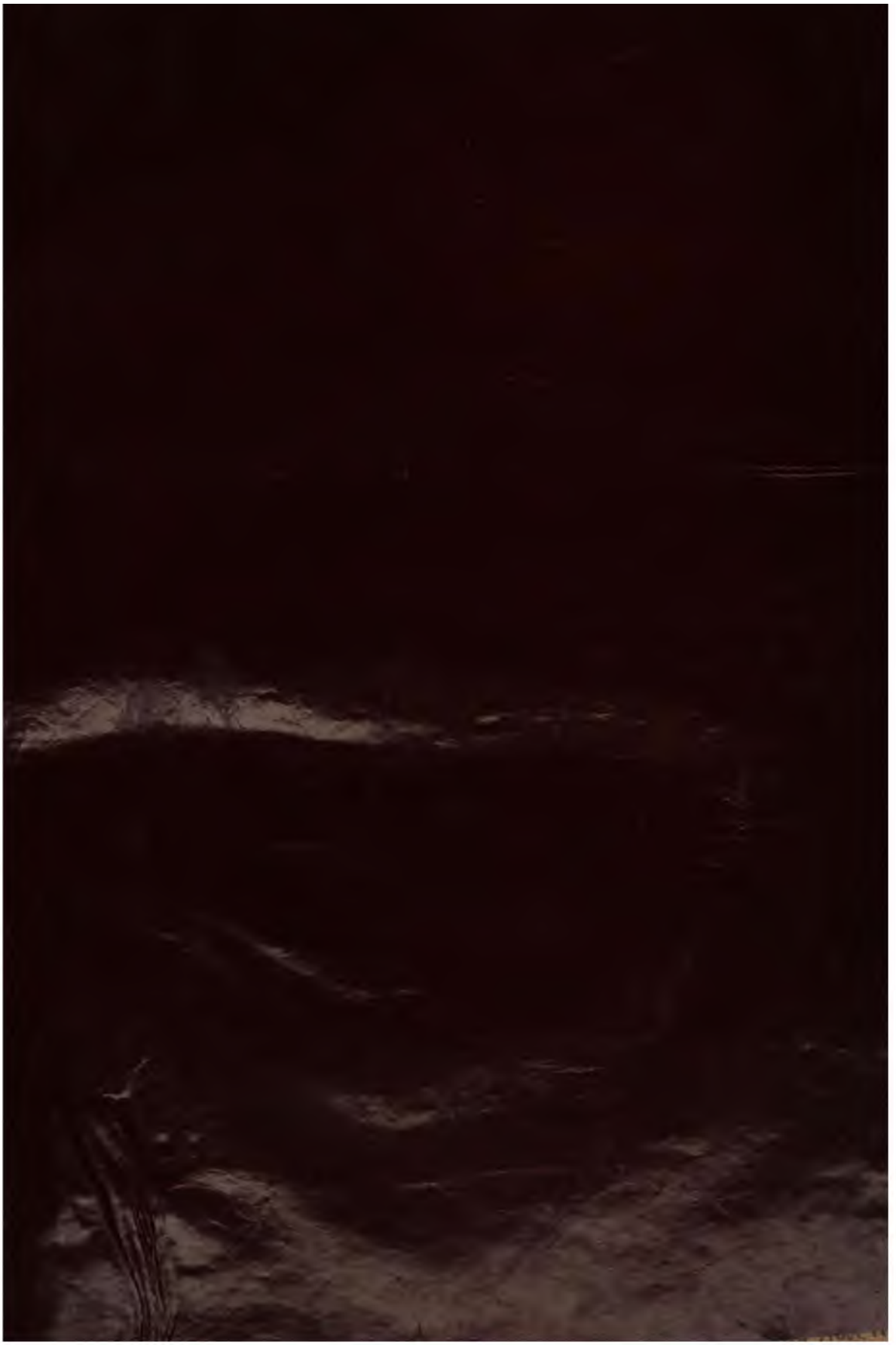
$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=\frac{ds^3}{d^2y\,dx-d^2x\,dy}$$

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''} \quad \text{и} \quad \eta=y+\frac{(1+y'^2)}{y''}$$

$x-\rho\sin\alpha$ $\quad$ $y+\rho\cos\alpha$

$$\xi^{\text{ел}}=\frac{(a^2-b^2)x^3}{a^4} \qquad \eta^{\text{ел}}=-\frac{(a^2-b^2)y^3}{b^4}.$$

развертка ел $\left(\dfrac{\xi}{\ }\right)^{2/3}+\left(\dfrac{\eta}{\ }\right)^{2/3}$



7. мая. Арак.

Лекціи

Э. О. Пр. Млодзѣевскаго

по

Высшей алгебрѣ

1894

Лит. Общ. Росс. По.

Высшая алгебра есть ученіе объ алгебраическихъ уравненіяхъ, т.е. такихъ, первая часть которыхъ представляетъ алгебраическую функцію. Опредѣленіе алгебраическихъ уравненій было дано въ курсѣ элементарной математики; это такая функція, въ которую входятъ дѣйствія сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возведенія въ степень и извлеченія корня; а не входятъ трансцендентныя дѣйствія, какъ напр. Sin., Cos., tg., и проч., знакъ lg, dif., и проч., а также показательная функція (a^x).

Въ томъ же курсѣ элементарной математики было указано, что путемъ, быть можетъ очень многочисленныхъ, умноженій и возведеній въ степень можно всякую алгебраическую функцію привести къ цѣлому и раціональному виду, т.е. представить въ видѣ многочлена, расположеннаго по восходящимъ или нисходящимъ степенямъ перемѣннаго.

Алгебраическія уравненія имѣютъ общую формулу рѣшенія только до четвертой степени. Съ рѣшеніемъ уравненій первой и второй степени знакомитъ гимназическій курсъ алгебры. Высшая алгебра, изложивши сначала необходимыя предварительныя свѣденія, познакомитъ съ рѣшеніемъ кубичныхъ уравненій и уравненій четвертой степени. Для дальнѣйшихъ же степеней уравненій общихъ формулъ рѣшенія не существуетъ и приходится употреблять различныя хитроумныя комбинаціи, чтобы проникнуть хоть нѣсколько въ эту область. Все, что относится къ рѣшенію точному, или приблизительному уравненій высшихъ степеней, все это и составляетъ Высшую алгебру.

Высшая алгебра есть ученіе объ алгебраическихъ уравненіяхъ, т.е. такихъ, первая часть которыхъ представляетъ алгебраическую функцію. Опредѣленіе алгебраическихъ уравненій было дано въ курсѣ элементарной математики; это такая функція, въ которую входятъ дѣйствія сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возведенія въ степень и извлеченія корня; а не входятъ трансцендентныя дѣйствія, какъ напр. Sin., Cos., tg., и проч., знакъ lg, dif, и проч., а также показательная функція (a^x).

Въ томъ же курсѣ элементарной математики было указано, что путемъ, быть можетъ очень многочисленныхъ, умноженій и возведеній въ степень можно всякую алгебраическую функцію привести къ цѣлому и раціональному виду, т.е. представить въ видѣ многочлена, расположеннаго по восходящимъ или нисходящимъ степенямъ перемѣннаго.

Алгебраическія уравненія имѣютъ общую формулу рѣшенія только до четвертой степени. Съ рѣшеніемъ уравненій первой и второй степени знакомитъ гимназическій курсъ алгебры. Высшая алгебра, изложивши сначала необходимыя предварительныя свѣдѣнія, познакомитъ съ рѣшеніемъ кубичныхъ уравненій и уравненій четвертой степени. Для дальнѣйшихъ же степеней уравненій общихъ формулъ рѣшенія не существуетъ и приходится употреблять различныя хитроумныя комбинаціи, чтобы проникнуть хоть нѣсколько въ эту область. Все, что относится къ рѣшенію точному, или приблизительному уравненій высшихъ степеней, все это и составляетъ Высшую алгебру.

---

§ 1. Комплексныя величины.

Корень изъ отрицательной величины извлечь нельзя. Не подкоренное отрицательное количество представляютъ въ видѣ произведенія того-же количества съ положительнымъ знакомъ на отрицательную единицу. Изъ положительнаго количества извлекаютъ корень и подъ корнемъ оставляютъ только отрицательную единицу. Величину $\sqrt{-1}$ условились обозначать буквой i.

Такъ какъ функція можетъ состоять изъ дѣйствительныхъ величинъ, изъ мнимыхъ, или изъ обѣихъ вмѣстѣ, то выраженіе вида

$$A + Bi$$

представляетъ самое общее обозначеніе всякой функціи, потому что если въ немъ $A=0$, то оно представитъ величину мнимую, если $B=0$, то дѣйствительную, а въ полномъ видѣ оно состоитъ изъ ихъ совокупности. Величина эта носитъ названіе комплексной.

Надъ мнимой величиной i условились производить всѣ дѣйствія, какъ бы надъ дѣйствительной величиной. Приэтомъ $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=+1$. Двѣ комплексныя величины считаются равными,

$$A+Bi = A'+B'i,$$

если отдѣльно $A=A'$ и $B=B'$.

Комплексную величину $A+Bi$ всегда можно представить въ видѣ

$$\rho.\cos\varphi + \rho.i.\sin\varphi.$$

дѣйствительно изъ уравненій

$$A=\rho.\cos\varphi\,;\quad B=\rho.\sin\varphi$$

величины ρ и φ вполнѣ опредѣляются. Возведеніемъ въ квадратъ и сложеніемъ этихъ уравненій, опредѣлится ρ

$$\rho=\pm\sqrt{A^2+B^2},$$

а подстановкою ρ въ нихъ даютъ $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$

$$\cos\varphi=\frac{A}{+\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \sin\varphi=\frac{B}{+\sqrt{A^2+B^2}}$$

Итак всегда можно написать

$$A + Bi = \rho(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$$

ρ называется <u>модулем</u> комплексной величины, φ – <u>аргументом</u> ея.

Так как комплексная величина представляет наиболее общий вид величины, то высшая алгебра предполагает левыя части своих уравнений комплексными; но часто приходится говорить, что такая-то величина больше, или меньше другой, а величина i совершенно неизвестна и сравнивать ее съ дѣйствительными величинами нельзя; поэтому въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ приходится сравнивать, говорятъ не объ комплексной величинѣ, а объ ея модулѣ $\rho = +\sqrt{A^2+B^2}$. Надо замѣтить, что если функція дѣйствительна, т.е. если $B=0$, то модуль ρ представляетъ самую функцію, потому что тогда $\rho = +\sqrt{A^2} = A$.

Если даны ρ и φ, то этимъ вполнѣ опредѣляется комплексная величина, но если дана комплексная величина, то аргументъ имѣетъ безконечное число значеній, именно онъ можетъ быть φ, но можетъ быть и $\varphi+2\pi$, и $\varphi+4\pi$ и т.д., т.е. можно къ нему прибавлять сколько угодно цѣлыхъ окружностей, потому что $\sin(2n.\pi+\varphi) = \sin\varphi$ и $\cos(2n.\pi+\varphi) = \cos\varphi$.

Комплексную величину $A+Bi$ можно изобразить геометрически. На линіи Ox отъ точки O отложимъ отрѣзокъ $OQ = A$, и въ конецъ его возставимъ перпендикуляръ $QP = B$. Сумма $OQ + QP.i$ представитъ комплексную величину $A+Bi$, потому что, если принять

OP за модуль, а уголъ $XOP = \varphi$ за аргументъ, то изъ треугольника OPQ

$$OP = \rho = \sqrt{OQ^2+QP^2} = \sqrt{A^2+B^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{OQ}{OP} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\ ; \quad \sin\varphi = \frac{QP}{OP} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Величина i есть слѣд. отрицательное отношеніе отрѣзковъ OQ и QP

Теорема I. Модуль суммы двухъ комплексныхъ величинъ меньше суммы ихъ модулей и больше разности ихъ модулей.

Даны двѣ комплексныя величины

$$\varrho'(\cos\alpha' + i.\sin\alpha') \qquad \varrho''(\cos\alpha'' + i.\sin\alpha'')$$

Если положить, что найдена ихъ сумма

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \varrho'(\cos\alpha' + i.\sin\alpha') + \varrho''(\cos\alpha'' + i.\sin\alpha'')$$

то дѣйствительныя части двухъ равныхъ комплексныхъ величинъ должны быть равны между собой, а мнимыя между собой, т.е.

$$\varrho.\cos\varphi = \varrho'.\cos\alpha' + \varrho''.\cos\alpha''; \quad \varrho.\sin\varphi = \varrho'.\sin\alpha' + \varrho''.\sin\alpha''.$$

Получилось два уравненія съ двумя неизвѣстными ϱ и φ. Для теоремы нужно только ϱ, которое опредѣлится изъ суммы квадратовъ уравненій

$$\varrho^2.\cos^2\varphi = \varrho'^2.\cos^2\alpha' + 2\varrho'\varrho''.\cos\alpha'.\cos\alpha'' + \varrho''^2.\cos^2\alpha''$$

$$\varrho^2.\sin^2\varphi = \varrho'^2.\sin^2\alpha' + 2\varrho'\varrho''\sin\alpha'.\sin\alpha'' + \varrho''^2\sin^2\alpha''.$$

$$\varrho = \sqrt{\varrho'^2 + 2\varrho'\varrho''.\cos(\alpha'-\alpha'') + \varrho''^2}$$

Если бы ϱ равнялось суммѣ $\varrho'+\varrho''$, то надъ корнемъ стояло-бы $\varrho'^2 + 2\varrho'\varrho'' + \varrho''^2$; если бы $\varrho = \varrho' - \varrho''$, то $\varrho'^2 - 2\varrho'\varrho'' + \varrho''^2$. Косинусъ измѣняется отъ $+1$ до -1. Слѣд.

$$+2\varrho'\varrho'' \geqq 2\varrho'\varrho''.\cos(\alpha'-\alpha'') \geqq -2\varrho'\varrho''.$$

а поэтому величина ϱ меньше, или равна суммѣ $\varrho'+\varrho''$ и больше, или равна разности $\varrho'-\varrho''$.

$$\varrho \leqq \sqrt{(\varrho'+\varrho'')^2} \qquad \varrho \leqq \varrho'+\varrho''.$$

$$\varrho \geqq \sqrt{(\varrho'-\varrho'')^2} \qquad \varrho \geqq \varrho'-\varrho''.$$

Тоже самое можно доказать и геометрически. Даны двѣ комплексныя величины $a'+b'i$ и $a''+b''i$. Сумма ихъ будетъ $a'+a''+(b'+b'')i$. Надо построить всѣ три величины. Діагональ параллелограмма $OMPN$ служитъ модулемъ суммы, если OSM и OFN выражаютъ данныя комплексныя величины, потому что $OQ = a'+a''$ ($SQ = OF$ изъ равенства треугольниковъ

OMP и MPM') и $OP = \rho' + \rho''$ ($MP = PM'$ при тяжести $\Delta\alpha$-вх). Итак

$$OP = \rho$$

но OP, хотя сторона треугольника OMP, меньше суммы двух других сторон и больше их разности, как в пределе, когда NOM — прямая линія, равна суммѣ, или разности; поэтому $\rho \leq \rho' + \rho''$ и $\rho \geq \rho' - \rho''$.

Теорема II Модуль произведенія двухъ комплексныхъ величинъ равенъ произведенію ихъ модулей, а аргументъ произведенія равенъ суммѣ аргументовъ производителей.

Дано:
$$\rho(\cos\alpha + i.\sin\alpha)$$
$$\rho'(\cos\alpha' + i.\sin\alpha')$$

Произведеніе ихъ будетъ

$$\rho\rho'(\cos\alpha + i.\sin\alpha)(\cos\alpha' + i.\sin\alpha')$$
$$\rho\rho'\{\cos\alpha.\cos\alpha' + i(\sin\alpha.\cos\alpha' + \sin\alpha'.\cos\alpha) - \sin\alpha.\sin\alpha'\}$$
$$\rho\rho'\{\cos(\alpha+\alpha') + i.\sin(\alpha+\alpha')\}$$

Теорема доказана; модуль произведенія $= \rho\rho'$, его аргументъ $= \alpha + \alpha'$

Слѣдствіе 1. Модуль частнаго двухъ комплексныхъ величинъ равняется частному ихъ модулей, а аргументъ частнаго равенъ разности аргументовъ дѣлимаго и дѣлителя.

Даны: $\rho(\cos\alpha + i.\sin\alpha)$; $\rho'(\cos\alpha' + i.\sin\alpha')$

Если сдѣлать умноженіе величинъ

$$\frac{\rho}{\rho'}\{\cos(\alpha-\alpha') + i\sin(\alpha-\alpha')\}.\rho'(\cos\alpha' + i.\sin\alpha),$$

то по предыдущей теоремѣ оно

$$= \rho(\cos\alpha + i.\sin\alpha),$$

но множитель равенъ произведенію, дѣленному на другой множитель, слѣд.

$$\frac{\rho}{\rho'}\{\cos(\alpha-\alpha') + i.\sin(\alpha-\alpha')\} = \frac{\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{\rho'(\cos\alpha' + i.\sin\alpha')}$$

Слѣдствіе 2. Модуль произведенія нѣсколькихъ комплексныхъ величинъ равенъ произведенію модулей производителей, а аргументъ такого произведенія равенъ суммѣ аргументовъ производителей.

Стоитъ только примѣнить предыдущую теорему сначала къ двумъ данными комплексными величинамъ, затѣмъ къ ихъ

произведению и третьей величины и т.д., и следствіе 2 доказано.

Слѣдствіе 3. Модуль степени комплексной величины равенъ степени ея модуля, а аргументъ равенъ аргументу данной величины, умноженному на показатель степени.

Это понятно, если принять во вниманіе, что степень есть произведеніе равныхъ производителей: произведеніе равныхъ модулей есть степень модуля, а сумма равныхъ аргументовъ есть аргументъ, умноженный на ихъ число.

Слѣдствіе 4. Модуль корня изъ комплексной величины равенъ корню изъ ея модуля, а аргументъ равенъ аргументу, дѣленному на показатель корня.

Это слѣдствіе заключается въ предыдущемъ, потому что корень есть дробная степень.

§2. Цѣлыя функціи.

Общій видъ алгебраическаго уравненія есть $f(x) = 0$, гдѣ $f(x)$ есть цѣлая функція

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

Въ аналитической геометріи употребляютъ уравненія съ двумя неизвѣстными. Это неопредѣленныя уравненія, выражающія различныя линіи. Здѣсь уравненіе $f(x) = 0$ опредѣленное и значеніе его различно какъ угодно, смотря по тому, въ какой области оно примѣняется. Вообще всякое явленіе, представляющее какую-нибудь зависимость между двумя или нѣсколькими величинами, можетъ быть выражено уравненіемъ; самая жизнь представляетъ ведь и всегда сложную зависимость этихъ величинъ отъ другихъ, т.е. уравненія. Потому-то высшая алгебра особенно и важна, что разъ будетъ найденъ способъ рѣшать всякое уравненіе, то для человѣка не останется никакихъ сомнѣній. Онъ замѣнитъ знаніемъ.

Въ отличіе отъ уравненій аналитической геометріи въ вы-

ной алгебрѣ вмѣсто x употребляется буква z. Величины A_0, $A_1 \ldots A_m$, служащія коэффиціентами, представляютъ или извѣстныя величины, или же нѣкоторыя функціи другихъ перемѣнныхъ. Въ общемъ случаѣ они не нули, но въ частныхъ нѣкоторые могутъ быть нулями. Коэффиціентъ A_0 иногда удобно приводить къ единицѣ, дѣля на него $f(z)=0$.

Разложеніе цѣлой функціи $f(z+h)$ по степенямъ h.

Дано
$$f(z) \equiv A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m$$
Если z замѣнить черезъ $z+h$, гдѣ h есть безконечно малая величина, т.е. величина, имѣющая своимъ предѣломъ нуль, то
$$f(z+h) \equiv A_0 (z+h)^m + A_1 (z+h)^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1}(z+h) + A_m$$

Каждый членъ этой функціи можно разложить, пользуясь биномомъ Ньютона. Вотъ это разложеніе; члены съ одинаковыми степенями h подписаны здѣсь одинъ подъ другимъ, а каждая строка представляетъ членъ функціи $f(z+h)$:

$$\begin{array}{lllllll}
f(z+h) = & A_0 z^m + & \frac{m}{1} A_0 z^{m-1} h + & \frac{m(m-1)}{1.2} A_0 z^{m-2} h^2 & + \ldots\ldots + & \frac{m(m-1)\ldots 2}{1.2\ldots(m-1)} A_0 z h^{m-1} & + A_0 h^m \\
& + A_1 z^{m-1} + & \frac{m-1}{1} A_1 z^{m-2} h + & \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} A_1 z^{m-3} h^2 & + \ldots\ldots + & \frac{(m-1)\ldots 2}{1.2\ldots(m-1)} A_1 h^{m-1} & + \\
& + A_2 z^{m-2} + & \frac{m-2}{1} A_2 z^{m-3} h + & \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} A_2 z^{m-4} h^2 & + \ldots\ldots + & & \\
& + \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\
& + \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\
& + A_{m-2} z^2 + & \frac{2}{1} A_{m-2} z h + & \frac{2.1}{1.2} A_{m-2} h^2 & + & & \\
& + A_{m-1} z + & \frac{1}{1} A_{m-1} h + & & & & \\
& + A_m + & & & & &
\end{array}$$

Первый столбецъ представляетъ функцію $f(z)$.
$$f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-2} z^2 + A_{m-1} z + A_m;$$
второй имѣетъ общій множитель $\frac{h}{1}$, третій множитель $\frac{h^2}{1.2}$, четвертый — $\frac{h^3}{1.2.3}$ и т.д.; предпослѣдній — $\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}$ послѣдній, если его представить въ видѣ $\frac{m(m-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots\ldots(m-1)m} A_0 h^m$, обладаетъ множителемъ $\frac{h^m}{1.2\ldots(m-1)m}$. Коэффиціенты при этихъ множителяхъ называются производными функціями отъ $f(z)$ и обозначаются $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z) \ldots\ldots f^{(m)}(z)$; такъ что

$$f'(z) = m A_0 z^{m-1} + (m-1) A_1 z^{m-2} + \ldots + 2 A_{m-2} z + A_{m-1}$$
$$f''(z) = m(m-1) A_0 z^{m-2} + (m-1)(m-2) A_1 z^{m-3} + \ldots + 2.1 A_{m-2}$$
$$f'''(z) = m(m-1)(m-2) A_0 z^{m-3} + (m-1)(m-2)(m-3) A_1 z^{m-4} + \ldots$$

. . . . . .

. . . . . .

$$f^{(m-1)}(z) = m(m-1)\ldots 2 A_0 z + (m-1)\ldots 2 A_1$$
$$f^{(m)}(z) = m(m-1)\ldots 2.1 A_0$$

Сравнивая первую производную съ функціей $f(x)$, вторую производную съ первой, третью со второй и т.д., можно замѣтить такъ и ихъ составленіе. Каждая производная получается изъ предыдущей умноженіемъ каждаго члена на показателя степени при z въ соотвѣтствующемъ членѣ предыдущей функціи и понижеченіемъ степени всѣхъ z на единицу. Такъ какъ понижеченіемъ степень z каждаго члена необходимо въ концѣ концовъ сдѣлается равной нулю, то членъ слѣдующей производной на него помноженный и сдѣлается нулемъ. Въ послѣднемъ, напр., членѣ функціи перемѣнное z входитъ въ нулевой степени; m-ый членъ первой производной умноженъ на степень 0 и исчезнетъ; вслѣдствіе съ тѣмъ $(m-1)$-ый членъ понизитъ свою степень съ первой на нулевую и потому во второй производной исчезнетъ и т.д.; въ каждой производной будетъ членомъ меньше, чѣмъ въ предыдущей, пока первый членъ не сдѣлается нулевой степени. Итакъ, число производныхъ цѣлой функціи ограничено: оно равно степени начальной функціи, потому что каждымъ вычитаніемъ единицы изъ m образуется новая производная, а изъ m единицу можно вычесть m разъ. Послѣдняя производная $(m$-ая$)$ представляетъ величину, свободную отъ z.

Изъ способа полученія производныхъ видно, что.

$$f(z+h) \equiv f(z) + \frac{h}{1} f'(z) + \frac{h^2}{1.2} f''(z) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(z) + \ldots + \frac{h^m}{1.2\ldots m} f^{(m)}(z);$$

Это разложеніе $f(z+h)$ по степенямъ h называется Тейлоровой строкой; если перенести $f(z)$ въ лѣвую часть, то функція

$$f(z+h) - f(z) \equiv h f'(z) + \frac{h^2}{1.2} f''(z) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(z) + \ldots + \frac{h^m}{1.2\ldots m} f^{(m)}(z);$$

выразитъ, на сколько увеличилась $f(z)$ благодаря тому, что перемѣнное z увеличено на h. Если h дойдетъ до предѣла, т.е. обратится въ нуль, то и $f(z+h)-f(z)$ обратится въ нуль, т.е. $f(z)$ не измѣнится, если къ z прибавить 0.

Но отношеніе этихъ приращеній — приращенія перемѣннаго и приращенія функціи, которое на первый взглядъ $=\frac{0}{0}$, имѣетъ вполнѣ опредѣленную величину. Именно, если раздѣлить обѣ части послѣдней формулы на h,

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=f'(z)+\frac{h}{1.2}f''(z)+\frac{h^2}{1.2.3.}f'''(z)+\ldots+\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots m}f^{(m)}(z)$$

и теперь положить $h=0$, то во второй части всѣ члены, начиная со второго, исчезнутъ, такъ какъ въ нихъ входитъ h множителемъ, а первый членъ $f'(z)$ останется, такъ что

$$\lim\left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right)=f'(z)$$

Отсюда: первая производная есть противъ отношенія приращенія функціи къ приращенію независимаго перемѣннаго, когда послѣднее приращеніе обращается въ нуль. Вторая производная играетъ такую же роль по отношенію къ первой, какъ первая къ функціи. Точно такъ же третья ко второй и т.д.

Производныя имѣютъ важное значеніе: все дифференціальное исчисленіе есть приложеніе свойствъ производныхъ. Дифференціалами функціи и перемѣннаго называются такія величины, которыя находятся въ такомъ же отношеніи, какъ приращенія функціи и перемѣннаго, т.е.

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=f'(z)$$

поэтому дифференціалами могутъ быть какія угодно величина, находящіяся въ такомъ отношеніи; но ихъ считаютъ обыкновенно достигшими предѣла, имѣющими вполнѣ опредѣленное значеніе и надъ ними производятся дѣйствія, какъ надъ опредѣленными величинами. Изъ написанной выше формулы прямо вытекаетъ основная теорема дифференціальнаго исчисленія, на которой оно все и построено: Дифференціалъ функціи ра=

произведенію

венъ производной на дифференціалъ перемѣннаго. $d f(z) = f'(z) . dz$.
Если хорошо усвоить себѣ понятіе о производной и дифференціалѣ, то дифференціальное исчисленіе окажется весьма удобопонятнымъ. Дифференцированіемъ называется отыскиваніе по функціи ея производныхъ. Первое дифференцированіе — отыскиваніе первой производной, второе — второй и т.д. Дифференціалы чрезвычайно облегчаютъ геометрическія изслѣдованія, а выгода примѣненія ихъ въ анализѣ видна на примѣрахъ касательныхъ въ аналитической геометріи.

Теорема 1. Если $f(z)$ обращается въ нуль при $z=0$ (это можетъ быть въ томъ случаѣ, если нѣтъ извѣстнаго члена), то для модуля z можно найти такое достаточно малое значеніе r, что модуль функціи $f(z)$ будетъ меньше произвольно малой величины R [при всѣхъ значеніяхъ $mod. z = (0, r)$].

Модуль какой-нибудь величины A обозначается

$$mod. A = |A|$$

Дана $f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots\ldots\ldots + A_{m-1} z$;
обращающаяся въ нуль при $z=0$. Пусть $|z| = \varrho$, $|A_0| = a_0$, $|A_1| = a_1 \ldots$; наибольшій изъ модулей $a_0, a_1, \ldots\ldots a_{m-1}$ пусть будетъ a.

$f(z)$ представляетъ прежде всего сумму. Ея модуль по теоремѣ 1 меньше суммы модулей слагаемыхъ, или въ крайнемъ случаѣ равенъ ей:

$$|f(z)| \leqq |A_0 z^m| + |A_1 z^{m-1}| + \ldots\ldots + |A_{m-1} z|;$$

теперь каждый членъ представляетъ модуль произведенія; по теоремѣ 2 можно написать

$$|f(z)| \leqq a_0 |z^m| + a_1 |z^{m-1}| + \ldots\ldots + a_{m-1} |z|$$

появились модули степеней; по слѣдствію 3 теоремы 2

$$|f(z)| \leqq a_0 \varrho^m + a_1 \varrho^{m-1} + \ldots\ldots + a_{m-1} \varrho$$

Если замѣнить $a_0, a_1, a_2 \ldots a_{m-1}$ наибольшимъ изъ нихъ a, то вторая часть увеличится, неравенство усилится, а равенство исчезнетъ

$$|f(z)| < a(\varrho^m + \varrho^{m-1} + \ldots + \varrho^2 + \varrho)$$

$(\rho^m + \ldots + \rho)$ представляетъ сумму убывающей геометрической прогрессіи съ знаменателемъ ρ; такъ что

$$|f(z)| < a\,\frac{\rho - \rho^{m+1}}{1-\rho};$$

если откинуть ρ^{m+1}, то неравенство усилится: $(\rho < 1)$

$$|f(z)| < \frac{a\rho}{1-\rho}$$

Величина $|f(z)|$ меньше, чѣмъ $\frac{a\rho}{1-\rho}$. Нужно, чтобы $|f(z)|$ былъ меньше R; если положить $\frac{a\rho}{1-\rho} < R$, то конечно $|f(z)|$ будетъ меньше R, а если такъ, то искомая величина $\rho = |z|$ опредѣлится изъ неравенства

$$\frac{a\rho}{1-\rho} < R \quad \text{именно} \quad \rho < \frac{R}{a+R}$$

Если даже взять такое значеніе $\rho = |z| = r$, что

$$\frac{ar}{1-r} = R, \text{ и слѣд. } r = \frac{R}{a+R}$$

то все таки $|f(z)| < R$. Итакъ $|f(z)| < R$ для всѣхъ значеній модуля $z = (0, r)$, гдѣ $r = \frac{R}{a+R}$. и $R = \frac{\ }{1-r}$

<u>Слѣдствіе 1.</u> Цѣлую функцію

$$f(z) = A_{m-n} z^n + A_{m-n-1} z^{n+1} + \ldots + A_1 z^{m-1} + A_0 z^m$$

расположенную по возрастающимъ степенямъ z, можно представить въ видѣ

$$f(z) = A_{m-n} z^n (1+\varepsilon) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

и тогда можно для модуля z подобрать такое достаточно малое значеніе r, что модуль ε будетъ меньше произвольно малаго количества R для всѣхъ значеній $|z|$ отъ нуля до r.

Если раздѣлить и помножить $f(z)$ на первый членъ $A_{m-n} z^n$, то первый членъ обратится въ единицу, а остальные будутъ

$$\varepsilon = \frac{A_{m-n-1}}{A_{m-n}} z + \frac{A_{m-n-2}}{A_{m-n}} z^2 + \ldots + \frac{A_0}{A_{m-n}} z^{m-n}$$

но въ такомъ видѣ ε не имѣетъ свободнаго члена, ~~что~~ обращается въ нуль при $z=0$ и слѣд. по теоремѣ 1 для $|z|$ можно подобрать такое достаточно малое значеніе r, что $|\varepsilon|$ будетъ меньше произвольно малаго количества R

Отсюда слѣдуетъ, что если $|\varepsilon| = R$ положить меньшимъ единицы, то сумма всѣхъ членовъ, начиная со второго, будетъ

меньше первого члена; это видно из формулы (1).

Функция поэтому сохраняет знак первого члена для всех значений z, модуль которых не превышает некоторого предела.

Следствие II. Целую функцию

$$f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \dots\dots + A_{m-1} z + A_m$$

не обращающуюся в нуль при $z=0$ и расположенную по возрастающим степеням z, можно, начиная с некоторого члена, представить в виде

$$f(z) = A_0 z^m (1+\varepsilon)$$

и подобрать для $|z|$ такое значение r, что $|\varepsilon|$ будет меньше произвольно малого количества k при всех значениях $|z|$ от r до ∞.

Если $f(z)$ разделить на первый член $A_0 z^m$, то величина

$$\varepsilon = \frac{A_1}{A_0}\cdot\frac{1}{z} + \frac{A_2}{A_0}\frac{1}{z^2} + \dots\dots + \frac{A_{m-1}}{A_0}\frac{1}{z^{m-1}} + \frac{A_m}{A_0}\frac{1}{z^m}$$

$\frac{1}{z}$ можно заменить через ζ, тогда ε есть целая функция, расположенная по возрастающим степеням ζ, и обращающаяся в нуль при $\zeta=0$. По теореме I, для всех значений $|\zeta|$ от 0 до некоторого предела $\frac{1}{r}$, $|\varepsilon|$ меньше произвольно малого k. Но если $|\zeta| = \left|\frac{1}{z}\right| = \left(0, \frac{1}{r}\right)$, то $z = \left(\frac{1}{0}, \frac{1}{\frac{1}{r}}\right) = (\infty, r)$. Иначе для всех $|z|$ от ∞ до r модуль ε меньше k.

Иначе говоря, если $|z|$ взять достаточно большое значение, то $|\varepsilon|$ как угодно мало, а поэтому знак $f(z)$ тот же, что и знак первого члена $A_0 z^m$ для всех $|z|$, больших некоторого предела r.

Теорема 2. Целая функция непрерывна

Непрерывной функцией называется такая, когда модуль ее приращения

$$|f(z+h) - f(z)|$$

можно сделать как угодно малым при достаточно малом $|h|$.

Приращение $f(z+h) - f(z)$ целой функции, как известно, можно разложить

$$f(z+h) - f(z) = h f'(z) + h^2 \frac{f''(z)}{1.2} + \dots\dots + h^m \frac{f^{(m)}(z)}{1.2\dots m}$$

это функция, обращающаяся в нуль при $h=0$, и по теореме I

можно подобрать такое достаточно малое значеніе для $|h|$, что $|f(h)|$ будетъ меньше какъ угодно малой величины. а слѣдов. также $|f(z+h)-f(z)|$

Если высказанное условіе не выполняется, то функція прерывающаяся; это удобно выяснить на примѣрѣ: функція $E(z)$ — entier z, т.е. выбираются только цѣлыя значенія z. 0, 1, 2, 3 .... Пока z измѣняется отъ 0 до 1, функція остается постоянной, потому что z все время считается нулемъ, затѣмъ въ моментъ, когда z дѣлается равнымъ 1, функція сразу мѣняется, такъ какъ вмѣсто нуля въ нее подставляется 1; далѣе до $z=2$ оно опять сохраняетъ свою величину, а тутъ дѣлаетъ новый скачекъ. Понятно, что $f(z+h)-f(z)$ не можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой при маломъ h; приращеніе или равно нулю, или сразу дѣлается большимъ.

Слѣдствіе I. Если цѣлыя z и $f(z)$ — величины дѣйствительныя и если при $z=z_0$ и $z=z_1$ $f(z)$ имѣетъ разныя знаки, то между z_0 и z_1 всегда найдется одно или нѣсколько такихъ значеній z, которыя обращаютъ $f(z)$ въ нуль.

Если бы этого не было, то положительныя значенія $f(z)$, при измѣненіи z отъ z_0 до z_1, заключались бы между двумя предѣлами $+A$ и $+B$, а отрицательныя между $-A'$ и $-B'$; тогда между послѣднимъ положительнымъ значеніемъ функціи и первымъ отрицательнымъ, она не будетъ совсѣмъ имѣть значеній — будетъ перерывъ, но цѣлая функція непрерывна, и слѣд. такого промежутка не можетъ быть — положительныя значенія должны перейти въ отрицательныя непрерывно, т.е. черезъ нуль.

Слѣдствіе II. Если z и цѣлая $f(z)$ величины комплексныя, т.е.

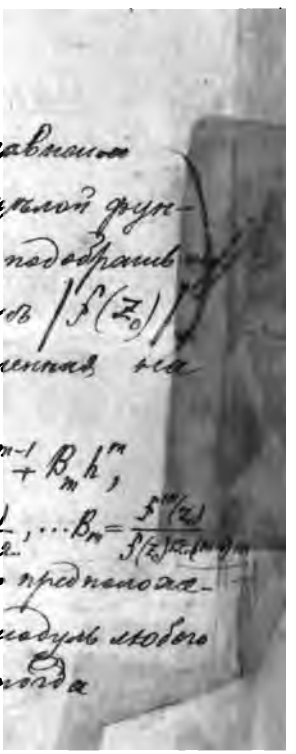
$$z = \rho(\cos\omega + i.\sin\omega),$$

$$f(z) = P + iQ$$

и если или модуль, или аргументъ z, или оба вмѣстѣ, измѣняются непрерывно, то ни одна изъ величинъ P и Q не можетъ перемѣнить знака, не пройдя черезъ нуль.

Это слѣдствіе доказывается такъ же, какъ предыдущее. Пусть при $\omega = \omega_0$ и $\omega = \omega_1$ (причемъ ρ или остается постояннымъ, или непрерывно мѣняется), величина P, или Q имѣетъ противоположные знаки. Если предположить, что она не переходитъ черезъ нуль, пока ω мѣняется отъ ω_0 до ω_1, то надо допустить, что положительныя значенія P, или Q заключены въ нѣкоторыхъ предѣлахъ и отрицательныя въ своихъ предѣлахъ. Между ближайшими другъ другу отрицательными и положительными предѣлами P, или Q не имѣетъ значеній — т.е. представляетъ собой прерывающуюся функцію, чего не можетъ быть.

§3. Основной принципъ теоріи уравненій.



<u>Лемма</u>. Если какое-нибудь значеніе z_0 независимаго перемѣннаго z не обращаетъ въ нуль модуль цѣлой функціи $f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m$, то можно подобрать такую величину h, что $|f(z_0+h)|$ будетъ меньше, чѣмъ $|f(z_0)|$.

$f(z_0+h)$ разложенная по степенямъ h и дѣленная на $f(z_0)$ будетъ равна

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)} = 1 + B_1 h + B_2 h^2 + \ldots + B_{m-1} h^{m-1} + B_m h^m,$$

гдѣ для краткости принято $B_1 = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$, $B_2 = \frac{f''(z_0)}{f(z_0).1.2}$, $\ldots B_m = \frac{f^{m}(z_0)}{f(z_0)\cdot 1.2\ldots(m-1)m}$.

Раздѣлить $f(z_0+h)$ на $f(z_0)$ можно, потому что по предположенію $f(z_0)$ не нуль, и частное слѣд. не ∞. Пусть модуль любого коэффиціента B_μ будетъ C_μ и аргументъ α_μ, тогда

$$B_1 = C_1 (\cos\alpha_1 + i.\sin\alpha_1)$$
$$B_2 = C_2 (\cos\alpha_2 + i.\sin\alpha_2)$$
$$B_3 = C_3 (\cos\alpha_3 + i.\sin\alpha_3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_n = C_n (\cos\alpha_n + i.\sin\alpha_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_m = C_m (\cos\alpha_m + i.\sin\alpha_m)$$

Некоторые члены $B_1, B_2 \ldots B_{m-1}$ могут быть нулями, но последний B_m нулем быть не может, ибо как $B_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{f(z_0)\,1.2\ldots(m-1)\,m} = \frac{c_m}{f(z_0)}$ (см. выше стр. 10).

Пусть B_n — первый коэффициент не обращающийся в нуль, и пусть

$$h = \rho(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$$

Коэффициенты $B_n, B_{n+1} \ldots B_m$, и abs. их модули и аргументы, даны, но h нужно подобрать, а поэтому его модуль и аргумент можно распоряжаться, как удобно. Выберем φ так, чтобы в функции

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)} = 1 + C_n\rho^n\left[\cos(\alpha_n + n\varphi) + i\sin(\alpha_n + n\varphi)\right] + C_{n+1}\rho^{n+1}\left[\cos(\alpha_{n+1} + (n+1)\varphi) + i\sin(\alpha_{n+1} + (n+1)\varphi)\right]$$
$$+ \ldots\ldots + C_m\rho^m\left[\cos(\alpha_m + m\varphi) + i\sin(\alpha_m + m\varphi)\right]$$

скобка второго члена правой части обратилась в (-1); для этого нужно, чтобы

$$\alpha_n + n\varphi = (2x+1)\pi$$

— нечетному числу полуокружностей; так как тогда $\cos(\alpha_n + n\varphi) = -1$, а $\sin(\alpha_n + n\varphi) = 0$. Модуль ρ выберем так, чтобы первые два члена $1 - C_n\rho^n$ — были положительны. Для этого ρ должно быть

$$\rho < \sqrt[n]{\frac{1}{C_n}}$$

Тогда модуль суммы меньше суммы модулей

$$\frac{|f(z_0+h)|}{|f(z_0)|} < 1 - C_n\rho^n + C_{n+1}\rho^{n+1} + C_{n+2}\rho^{n+2} + \ldots\ldots + C_m\rho^m$$

Если заменить модули коэффициентов наибольшим из них C и вынести ρ^n за скобки, то в скобках останется сумма геометрической прогрессии, обращающаяся в 1, при $\rho = 0$

$$\frac{|f(z_0+h)|}{|f(z_0)|} < 1 - C\rho^n\left(1 - \rho - \rho^2 - \ldots\ldots - \rho^{m-n}\right)$$

Тогда сумма $\rho + \rho^2 + \ldots\ldots + \rho^{m-n}$, обращающаяся в нуль при $\rho = 0$ можно сделать меньше, как угодно малой величины R, если взять

$$\rho < \frac{R}{1+R}$$

благодаря этому скобка представит положительную величину, как угодно мало разнящуюся от единицы, а так как $C\rho^n$ меньше 1, то вся правая часть неравенства положительна; значит только взять ρ меньшим обоих указанных пределов

$$\rho < \sqrt[n]{\frac{1}{C_n}} \quad \text{и} \quad \rho < \frac{R}{1+R}$$

следовательно

$$\frac{|f(z_0+h)|}{|f(z_0)|} < 1$$

Лит. Ф. Ф. Ф. Ф. Ф. Ф.

или
$$|f(z_0+h)| < |f(z_0)|$$

Изъ этой лемы непосредственно слѣдуетъ главный принципъ теоріи уравненій:

Теорема 3. Цѣлая функція $f(z)$ имѣетъ корень, т.е. существуетъ такое значеніе для z, которое обращаетъ эту функцію въ нуль.

Въ самомъ дѣлѣ, если предположить, что не существуетъ такого значенія, то надо допустить, что $|f(z)|$ при нѣкоторомъ значеніи z_0 есть minimum; но по предыдущей лемѣ можно подобрать такую величину h, что $|f(z_0+h)| < |f(z_0)|$; $|f(z_0)|$ предположенъ minimum-омъ, а теперь находится величина меньшая его, слѣд. minimum необходимо долженъ быть нулемъ, (чтобы не могло быть величины меньшей его) т.е. $f(z)$ имѣетъ корень. Отсюда

Теорема 4.[x] Цѣлая функція $f(z)$ m-ой степени равна произведенію m линейныхъ множителей на коэффиціентъ при высшей степени z.

Линейный множитель — множитель первой степени. Пусть
$$f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m$$
и
$$a \quad b \quad c \quad \ldots\ldots \quad k, l$$
m какихъ нибудь величинъ — дѣйствительныхъ, или мнимыхъ. Частное отъ дѣленія $f(z)$ на $z-a$ пусть будетъ $f_1(z)$ и остатокъ R_1; отъ дѣленія $f_1(z)$ на $z-b$ частное $f_2(z)$ и остатокъ R_2 и т. д. — отъ дѣленія $f_{m-1}(z)$ на $z-l$ частное $f_m(z)$ и остатокъ R_m. Степень частныхъ $f_1(z)$, $f_2(z) \ldots f_m(z)$ при каждомъ дѣленіи понижается на единицу. Коэффиціентъ A_0 при старшей z — остается во всѣхъ частныхъ; поэтому послѣдняя функція $f_m(z)$ будетъ нулевой степени и сведется къ коэффиціенту A_0. Такимъ образомъ
$$f(z) = (z-a) f_1(z) + R_1$$
$$f_1(z) = (z-b) f_2(z) + R_2$$
$$f_2(z) = (z-c) f_3(z) + R_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_{m-1}(z) = (z-l) f_m(z) + R_m$$

---

[x] Теоремы 4, 5, 6 взяты изъ прошлогоднихъ записокъ за пр. Мандрыевскимъ.

Если помножить эти равенства: первое на 1, второе на $(z-a)$, третье на $(z-b)(z-a)$ и т.д. m-ое на $(z-k)\ldots(z-b)(z-a)$ и сложить, то все $f_1(z), f_2(z)\ldots f_{m-1}(z)$ сократятся и останется

$$f(z) = A_0(z-a)(z-b)\ldots(z-l) + R_m(z-a)\ldots(z-k) + \ldots + R_3(z-a)(z-b) + R_2(z-a) + R_1$$

$f(z)$ по теореме имеет корень; таким как $ab\ldots kl$ любые величины, то пусть a и есть этот корень; тогда $z=a$; $f(z)=0$; $(z-a)f_1(z)=0$, и след. и $R_1=0$. $f_1(z)$ опять таки имеет корень, пусть этот корень есть b, тогда $R_2=0$ и т.д. все остальные равны нулю и

$$f(z) = A_0(z-a)(z-b)\ldots(z-l) \ldots\ldots\ldots (1)$$

Это соотношение указывает, что $f(z)$ m-ой степени имеет m корней, потому что при $z=a$, $z=b$ и т.д. $f(z)$ каждый раз обращается в нуль. Среди этих величин $ab\ldots kl$ некоторые могут быть равны между собой, и если находится μ величин равных a, то функция делится на $(z-a)^\mu$; тогда говорят, что функция имеет μ равных корней.

$f(z)$ не может иметь более m корней, если a степень m. Действительно, если допустить, что при $z=p$, $f(z)$ обращается в нуль, при чем p не равно ни одной из величин $ab\ldots l$, и подставить p в правую часть вместо z, то правая часть в нуль не обратится и окажется, что нуль равен конечной величине.

Следствие I. Сумма корней уравнения

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0$$

равна $-\frac{A_1}{A_0}$, а вообще сумма произведений из n корней по n $\sum a.b.c.g = (-1)^n \frac{A_n}{A_0}$. Поэтому произведение всех корней $ab\ldots l = (-1)^m \frac{A_m}{A_0}$. Правая часть формулы (1) в развернутом виде будет

$$f(z) = z^m - a \left| \begin{matrix} -b \\ -c \\ \vdots \end{matrix} \right. \left| \begin{matrix} z^{m-1} + ab \\ +ac \\ +\ldots \\ +bc \end{matrix} \right. \left| \begin{matrix} z^{m-2} - abc \\ -abd \\ -\ldots \\ -kdk \end{matrix} \right. z^{m-3} + \ldots (-1)^m abc\ldots l.$$

Съ другой стороны

$$f(z)=z^m+\frac{A_1}{A_0}z^{m-1}+\frac{A_2}{A_0}z^{m-2}+\frac{A_3}{A_0}z^{m-3}+\dots+\frac{A_m}{A_0}z.$$

Такъ какъ обѣ эти формулы выражаютъ одно и тоже, обѣ равны $f(z)$, то коэффиціенты при соотвѣтственныхъ степеняхъ z должны быть пропорціональны, такъ что

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
\frac{A_1}{A_0} &= -(a+b+c+\dots+l)=\sum a\\
\frac{A_2}{A_0} &= ab+bc+\dots+kl \quad =\sum ab\\
\frac{A_3}{A_0} &= -(abc+adc+\dots\dots)=\sum abc\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{A_m}{A_0} &= (-1)^m abcd\dots\dots kl=(-1)^m abcd\dots kl.
\end{aligned}$$

Степень каждой суммы равна индексу при соотвѣтственномъ коэффиціентѣ $A_1 A_2 \dots A_m$. Знакъ суммы чередуется, потомучто въ формулѣ (1) величины $ab\dots l$ всѣ входятъ съ минусомъ; при первыхъ ихъ степеняхъ знакъ $(-)$ и останется; — когда они входятъ въ видѣ произведеній двухъ множителей, то $(-)(-)=(+)$; при трехъ множителяхъ снова минусъ и т. д.; при m множителяхъ получится знакъ $(-)^m$.

<u>Примѣръ.</u> Дано

$$f(z)=z^4+p_1z^3+p_2z^2+p_3z+p_4=(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)$$

Если перемножить корни сначала попарно, потомъ всѣ, то получимъ

$$\begin{aligned}
f(z) &= [z^2-(a+b)z+ab][z^2-(c+d)z+cd]=\\
&= z^4-z^3(a+b+c+d)+z^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)-\\
&\quad -z(abc+abd+acd+bcd)+abcd.
\end{aligned}$$

и слѣд. $p_1=-(a+b+c+d)$; $p_2=+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$; $p_3=-(abc+$ $+abd+acd+bcd)$; $p_4=+abcd$.

<u>Слѣдствіе II</u> Если всѣ коэффиціенты $f(z)$ дѣйствительны, и если $f(z)$ имѣетъ n мнимыхъ корней типа $a=x+iy$, то у нее есть ровно столько же корней типа $b=x-iy$

Комплексныя величины $x+iy$ и $x-iy$ наз. <u>сопряженными</u>; они отличаются другъ отъ друга только знакомъ мнимой части.

Пусть $$f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y),$$
т.е. состоитъ изъ дѣйствительной части $\varphi(x,y)$ и мнимой $i\psi(x,y)$. Если $x+iy$ служитъ корнемъ функціи, т.е. обращаетъ ее въ нуль, то для этого необходимо, чтобы дѣйствительная и мнимая часть отдѣльно равнялась нулю; а въ такомъ случаѣ безразлично, какой знакъ стоитъ при i. Подстановка вмѣсто $x+iy$ сопряженнаго ему $x-iy$ измѣнитъ только знакъ при i, но равенство нулю обѣихъ частей $\varphi(x,y)=0$ и $\psi(x,y)=0$ останется. Слѣд. и $x-iy$ служитъ корнемъ, т.е. всякому корню $x+iy$ соотвѣтствуетъ корень $x-iy$.

Надо помнить, что коэффиціенты дѣйствительны. Если бы нѣкоторые изъ нихъ были мнимы, то знакъ i зависѣлъ бы не отъ однихъ корней и его перемѣна повлекла бы за собой измѣненіе въ самой функціи.

<u>Слѣдствіе III</u> Если $f(z)$ степени m обращается въ нуль при числѣ значеній z, большемъ, чѣмъ m, то это служитъ признакомъ, что коэффиціенты при различныхъ степеняхъ z нули.

Въ самомъ дѣлѣ, коэффиціентъ A_0 долженъ быть нулемъ, потому что иначе $f(z)$ обращается въ нуль только при m значеніяхъ z; но этимъ $f(z)$ сводится къ $m-1$-ной степени. На основаніи тѣхъ же соображеній должно A_1 быть нулемъ и т.д. Справедливость этого положенія видна на примѣрѣ квадратныхъ уравненій. Мнимые корни встрѣчаются въ нихъ исключительно попарно сопряженными.

<u>Теорема 5.</u> Если два уравненія $u=0$ и $v=0$ имѣютъ μ общихъ корней, равныхъ, или различныхъ, то простымъ алгебраическимъ дѣленіемъ можно найти такое уравненіе $D=0$ степени μ, которое имѣетъ эти μ корней.

Пусть
$$u = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0 \qquad m > n$$
$$v = B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \ldots + B_{n-1} z + B_n = 0$$
и пусть $D=0$ есть произведеніе всѣхъ линейныхъ множителей, об-

двух многочленах U и V. Если U делится нацело на V, то V и будет общим наибольшим делителем. (m т. е. меньшим $\geq n$) $U=D=0$ (предполагая $m>n$). Если же нет, то получим частное Q от деления и остаток R, так что

$$U = VQ + R.$$

Всякий многочлен, делящий V и R нацело, делит нацело и U, и если U и V имеют общего делителя, то на него делится и R. Отсюда: общий наибольший делитель один и тот же для U и V, как для V и R. Если V делится на R, то $R=D=0$, если же нет, то деление V на R даст частное Q_1 и остаток R_1,

таким образом

$$\begin{aligned} V &= RQ_1 + R_1 \\ R &= R_1Q_2 + R_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ R_{\gamma} &= R_{\gamma+1}Q_{\gamma+2} + R_{\gamma+2} \\ R_{\gamma+1} &= R_{\gamma+2}Q_{\gamma+3} \end{aligned}$$

пока не получатся

т. е. пока не найдется такой $R_{\gamma+2}$, который разделит предыдущий остаток нацело. На основании предыдущих соображений $R_{\gamma+2}$ и будет являться общим наибольшим делителем всех величин $R_{\gamma+1}, R_{\gamma}, \ldots\ldots R_2, R_1, R, V, U$. Ж $R_{\gamma+2}$ содержатся все множители, общие V и U, т. е. все их общие корни.

Разложение целой функции на линейные множители.

Если в функции

$$f(z) = A_0(z-a)(z-b)\ldots\ldots(z-l), \qquad \ldots\ldots (1)$$

заменить z через $z+h$,

$$f(z+h) = A_0(z-a+h)(z-b+h)\ldots(z-l+h) \qquad \ldots\ldots (2)$$

и разделить результат подстановки на $f(z)$, то

$$\frac{f(z+h)}{f(z)} = \frac{A_0(z-a+h)(z-b+h)\ldots\ldots(z-l+h)}{A_0(z-a)(z-b)\cdots(z-l)} =$$

$$= \left(1+\frac{h}{z-a}\right)\left(1+\frac{h}{z-b}\right)\ldots\left(1+\frac{h}{z-l}\right)$$

или, раскрывая по степеням h

$$\frac{f(z+h)}{f(z)} = 1 + h\left(\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}+\ldots+\frac{1}{z-l}\right) + \frac{h^2}{1\cdot 2}(\ldots\ldots) + \ldots$$

Единица получена перемножением всех единиц, входящих в скобки. Коэффициент при h получен умножением каждого $\frac{h}{x-\mu}$ на все остальные единицы. Дальнейшие коэффициенты не нужны.

Чтобы получить производную, надо умножить полученное выражение на $f(x)$; перенести $f(x)$ из правой части в левую

$$f(x+h)-f(x)=h\left(\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-b}+\dots+\frac{f(x)}{x-l}\right)+\frac{h^2}{h2}(\dots)+(\dots$$

разделить обе части на h и положить $h=0$. Производная будет

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-l}+\dots+\frac{f(x)}{x-l}+0.$$

Можно заменить $f(x)$ его выражением из формулы (1), тогда

$$f'(x)=A_0\{(x-b)(x-c)\dots(x-l)+(x-a)(x-c)\dots(x-l)+\dots+$$
$$+(x-a)(x-b)\dots(x-k).$$

Отсюда видно, что первая производная состоит из суммы членов, из которых каждый представляет произведение всех линейных множителей начальной функции кроме одного, при чем в первом члене не хватает первого линейного множителя, во втором второго, и т. д. по порядку.

Теорема 6. Кратность корней производного уравнения $f'(x)=0$ на единицу менее кратности корней начального $f(x)=0$.

Если среди корней $a,b,c,\dots l$ находятся μ между собой равных, т. е. $a=b=c=\dots=s_\mu$; а остальные $t,\dots k,l$ не равны между собой, то тогда

$$f'(x)=A_0\{(x-a)^{\mu-1}(x-t)\dots(x-l)+(x-a)^{\mu-1}(x-t)\dots(x-l)+\dots+$$
$$+[(x-a)^\mu\dots(x-l)+\dots+(x-a)^\mu(x-t)\dots(x-k)]$$

$f'(x)$ теперь составлена так: когда корни были не равны между собой, то в каждом члене $f'(x)$ не хватало одного корня. Очевидно в одних из членов не хватало корней из ряда $a,b,c,\dots s_\mu$; а в других из остальных $t,\dots k,l$. Теперь в члены второго типа войдут все равных множителей $(x-a)^\mu$, а в члены первого типа не будет хватать одного из этих равных множителей, и след. они будут входить в $\mu-1$ степени. Правило выражать производную можно представить так, выписав за скобки

множителей $(z-a)^{\mu-1}$ и $(z-a)^{\mu}$

$$f'(z) = (z-a)^{\mu-1} \cdot Q + (z-a)^{\mu} \cdot Q',$$

или

$$f'(z) = (z-a)^{\mu-1}\left[Q + (z-a)Q'\right]$$

Q не содержитъ множителя $(z-a)$; поэтому равныхъ корней въ производной будетъ $\mu-1$, на 1 меньше, чѣмъ въ начальной $f(z)$, имѣвшей μ равныхъ корней, иначе говоря кратность корней понизилась на единицу.

Въ частности, если всѣ корни $f(z)$ линейны, т.е. первой степени, то въ $f'(z)$ они войдутъ въ нулевой степени, т.е. $f(z)$ и $f'(z)$ не имѣютъ общихъ корней, если только корни $f(z)$ различны.

§4. Симметрическія функціи.

Симметрическими функціями называются такія, которыя не мѣняютъ ни величины своей, ни вида отъ перестановки входящихъ въ нихъ элементовъ одного на мѣсто другого всѣми возможными способами.

Коэффиціенты алгебраическаго уравненія представляютъ изъ себя симметрическія функціи корней уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, коэффиціенты уравненія

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} z + A_m = 0$$

равны (теорема 4, Слѣдствіе I) такимъ величинамъ

$$\frac{A_1}{A_0} = -(a+b+c+\ldots\ldots+l) = -\sum a$$

$$\frac{A_2}{A_0} = ab+ac+\ldots\ldots+kl = \sum ab$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{A_m}{A_0} = (-1)^m abc\ldots\ldots kl.$$

Въ нихъ можно перемѣнять мѣста любыхъ корней, напр. a и b, a, b и k и т.д. и функціи не измѣняютъ отъ этого ни вида ни величины, что нельзя сказать вообще о какой-нибудь функціи корней; напр. f: $a-b$ отъ перестановки a и b $b-a$; перемѣнитъ знакъ.

Изученіе раціональныхъ симметрическихъ функцій, которыя

только и будут здесь разсматриваться, сводится к нахожденію простѣйшихъ (наименьшихъ) симметрическихъ функцій, представляющихъ сумму произведеній или степеней элементовъ.

1.) Всякая неоднородная симметрическая функція состоитъ изъ нѣсколькихъ однородныхъ симметрическихъ функцій. Напр. функція $A(x^3+y^3+z^3)+B(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+Cxyz+D(x^2+y^2+z^2)+E(xy+xz+yz)+F(x+y+z)+K=U$ — можетъ быть разбита на 4 однородныхъ симметричныхъ функціи

$$A(x^3+y^3+z^3)+B(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+Cxyz;$$
$$D(x^2+y^2+z^2)+E(xy+xz+yz);$$
$$F(x+y+z);$$
$$K$$

2.) Однородную симметрическую функцію можно разложить на однородныя симметрическія простѣйшаго типа. Напр. функцію $D(x^2+y^2+z^2)+E(xy+xz+yz)$ можно разбить на двѣ

$$D(x^2+y^2+z^2)$$
$$E(xy+xz+yz)$$

3.) Дробная симметрическая функція необходимо имѣетъ и числителя и знаменателя симметрическія функціи. Пусть $f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ есть симметрическая дробная функція, которая отъ. не измѣняетъ вида и величины отъ перестановки какихъ-нибудь двухъ элементовъ x' и x'', но при этомъ пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не симметрическія функціи, т.е. отъ упомянутой перестановки отразятся въ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, такъ что $f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Если при нѣкоторомъ значеніи x функція $f(x)$ обращается въ нуль, то въ нуль должны обратиться и $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а это можетъ быть лишь когда $\varphi(x)=\psi(x)$ при всѣхъ значеніяхъ x; въ самомъ дѣлѣ, чтобы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ обращались въ нуль при одномъ и томъ же значеніи x, должны быть одинаковыми самыя функціи, т.е. зависимости между элементами. Зависимость эта не измѣняется отъ замѣненія величины элементы. Итакъ $\varphi(x)=\psi(x)$, но тогда

и $\psi(x) = \psi^n(x)$; т.е. и числитель и знаменатель симметрическія функціи. Изъ этихъ свойствъ симметрическихъ функцій вытекаетъ такая

Теорема 7. Всякую раціональную симметрическую функцію корней уравненія можно выразить черезъ коэффиціенты того же уравненія.

Это слѣдуетъ изъ того, что всякую раціональную дробную, несократимую симметрическую функцію можно привести къ цѣлому, отвлеченному простѣйшаго типа раціональному и симметрическому виду, а отдѣльныя простѣйшаго типа симметрическія функціи выражаются черезъ коэффиціенты; это видно изъ слѣдующихъ разсмотрѣній.

Простѣйшихъ типовъ, къ которымъ сводятся всякія симметрическія функціи, два: I сумма одинаковыхъ степеней и II сумма произведеній одного измѣренія, напр.

1) — $a^\delta + b^\delta + c^\delta + \ldots + k^\delta + l^\delta \equiv \sum a^\delta$

2) — $abcd + abce + abde + \ldots \equiv \sum abcd$,

при чемъ всякая симметрической функціей, или функціей двухъ буквъ называется сумма членовъ, составленныхъ изъ произведеній двухъ буквъ въ одинаковыхъ и нѣкоторыхъ же степеняхъ, напр.

$$a^\alpha b^\beta + a^\alpha c^\beta + b^\alpha c^\beta + b^\alpha a^\beta + \ldots \equiv \sum a^\alpha b^\beta$$

точно такимъ $\quad a^\alpha b^\beta c^\gamma + b^\alpha c^\beta a^\gamma + b^\alpha a^\beta d^\gamma + \ldots \equiv \sum a^\alpha b^\beta c^\gamma$

называется тройной суммой, или функціей трехъ буквъ.

Въ I слѣдствіи теоремы 4 были выведены правила симметрическія функціи втораго типа. Способъ Ньютона и слѣдствія Даютъ возможность вычислять функціи перваго типа и функціи высшихъ степеней черезъ коэффиціенты уравненія. Вычисленіе симметрическихъ и другихъ функцій корней важно для слѣдствій, что функціи эти помогаютъ рѣшать уравненія 3-ей и 4-ой степени, а кромѣ того важно для свѣдѣнія о корняхъ уравненій высшихъ степеней, неразрѣшимыхъ при современныхъ средствахъ.

Высшая алгебра старается как можно больше запастись разнообразными свѣдѣніями о корняхъ въ надеждѣ, что по нимъ будетъ возможность отыскивать общаго рѣшенія уравненій.

§5. Формулы Ньютона для вычисленія простыхъ симметрическихъ функцій корней черезъ коэффиціенты даннаго уравненія.

Уравненіе m-ой степени

$$f(x) = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + p_{m-1} x + p_m = 0.$$

можно представить въ видѣ произведенія (теорема 4.)

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-k)(x-l) = 0$$

Гдѣ $a, b, c, \ldots k, l$ — m корней его. Производная даннаго уравненія будетъ (§2)

$$f'(x) = m x^{m-1} + (m-1) p_1 x^{m-2} + \ldots\ldots + 2 p_{m-2} x + p_{m-1} = 0 \ldots (1)$$

или въ раціональномъ видѣ (слѣдуетъ §3)

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \ldots\ldots + \frac{f(x)}{x-l} = \sum \frac{f(x)}{x-a}$$

Если дѣйствительно раздѣлить $f(x)$ послѣдовательно на каждый изъ линейныхъ производителей, то

$$\begin{array}{l|l} x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + p_m & x - a \\ \pm x^m \mp a x^{m-1} & \\ \hline a + p_1 \;\big|\; x^{m-1} + p_2 x^{m-2} & \\ \pm a \;\big|\; x^{m-1} \mp a^2 & \\ \pm p_1 \;\big|\; \mp p_1 & \\ \hline a^2 + a p_1 + p_2 \;\big|\; x^{m-2} + x^{m-3} & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{и т.д.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^{m-1} + a + p_1 \;\big|\; x^{m-2} + a^2 + a p_1 + p_2 & x^{m-3} + \ldots \\ & \ldots \text{и т.д.} \end{array}$$

Законъ составленія частнаго можно предвидѣть уже здѣсь и, не производя дальнѣйшаго дѣленія, написать, что

$$\frac{f(x)}{x-a} = \begin{array}{l|l|l|l} x^{m-1} + a + p_1 & x^{m-2} + a^2 + p_1 a + p_2 & x^{m-3} + a^3 + p_1 a^2 + p_2 a + p_3 & x^{m-4} + \ldots\ldots + a^{m-1} + p_1 a^{m-2} + p_2 a^{m-3} + \ldots\ldots + p_{m-2} a + p_{m-1} \end{array}$$

Замѣной a другими корнями $b, c \ldots\ldots k, l$ получатся результаты дѣленія $f(z)$ на остальные линейные множители; производная равняется ихъ суммѣ. Если сумму одинаковыхъ степеней корней обозначить черезъ s, такъ что

$$s_1 = a + b + c + \ldots\ldots$$
$$s_2 = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

то сумма частныхъ $\sum \frac{f(z)}{z-a} = f'(z)$ обратится въ

$$f'(z) = mz^{m-1} + \begin{array}{l} s_1 \\ + mp_1 \end{array} \Bigg| z^{m-2} + \begin{array}{l} s_2 \\ + p_1 s_1 \\ + mp_2 \end{array} \Bigg| z^{m-3} + \begin{array}{l} s_3 \\ + p_1 s_2 \\ + p_2 s_1 \\ + mp_3 \end{array} \Bigg| z^{m-4} + \ldots\ldots + \begin{array}{l} s_{m-1} \\ + p_1 s_{m-2} \\ + p_2 s_{m-3} \\ + \ldots\ldots \\ + p_{m-2} s_1 \\ + m p_{m-1} \end{array}$$

потому что члены, не содержащіе корней, не измѣняются отъ подстановки однихъ корней на мѣсто другихъ и слѣд. войдутъ m разъ слагаемыми, т.е. помножатся на m, остальные же обратятся въ суммы одинаковыхъ степеней. Коэффиціенты только что выведенной величины $f'(z)$ и полученной ранѣе (1) должны быть тождественны, такъ что

$$(3) \quad \begin{cases} s_1 + mp_1 - (m-1)p_1 = 0, \text{ или } s_1 + p_1 = 0. \\ s_2 + p_1 s_1 + 2p_2 = 0 \\ s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1 + 3p_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{m-1} + p_1 s_{m-2} + p_2 s_{m-3} + \ldots + p_{m-2} s_1 + (m-1)p_{m-1} = 0. \end{cases}$$

(Въ формулѣ (2) коэффиціенты $p_1, p_2 \ldots\ldots p_{m-1}$ входятъ всѣ съ множителемъ m, а въ (1) послѣдовательно съ множителями $(m-1), (m-2) \ldots\ldots 3, 2, 1$, которые при вычитаніи уничтожатъ соотвѣтственныя величины въ множителяхъ m). Надо замѣтить, что всѣ эти формулы однородны, потому что s_1 и p_1 — суммы корней, s_2 и p_2, s_3 и $p_3 \ldots$ суммы двойныхъ, тройныхъ и т.д. степеней корней. Первая изъ формулъ (3) даетъ величину s_1, вторая послѣ подстановки s_1 даетъ s_2, третья s_3, и т.д., именно:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= -p_1 \\
S_2 &= p_1^2 - 2p_2 \\
S_3 &= -p_1^3 + 3p_1p_2 - 3p_3 \\
S_4 &= p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 4p_1p_3 + 2p_2^2 - 4p_4 \\
S_5 &= -p_1^5 + 5p_1^3p_2 - 5p_1^2p_3 - 5(p_2^2 - p_4)p_1 + 5(p_2p_3 - p_5) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Такимъ образомъ можно узнать простѣйшія симметрическія функціи начиная отъ первой степени и кончая $(m-1)$-ой, но нетрудно опредѣлить и симметрическія функціи высшихъ степеней, а также и отрицательныхъ. Пусть n произвольное число. Если умножить на x^n данное уравненіе

$$x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \ldots + p_{m-1}x + p_m = 0$$

то получится

$$x^{m+n} + p_1x^{m+n-1} + p_2x^{m+n-2} + \ldots + p_{m-1}x^{n+1} + p_mx^n = 0$$

Чтобы получить симметрическія функціи, надо замѣнить x послѣдовательно каждымъ изъ корней $a, b \ldots k, l$ и сложить результаты, тогда

$$S_{m+n} + p_1S_{m+n-1} + p_2S_{m+n-2} + \ldots + p_{m-1}S_{n+1} + p_mS_n = 0 \ldots\ldots (4)$$

затѣмъ положить послѣдовательно n равнымъ $0, 1, 2 \ldots$

$$
\begin{aligned}
S_m + p_1S_{m-1} + p_2S_{m-2} + \ldots + p_{m-1}S + p_m &= 0 \\
S_{m+1} + p_1S_m + p_2S_{m-1} + \ldots + p_{m-1}S_2 + p_mS &= 0 \\
S_{m+2} + p_1S_{m+1} + p_2S_m + \ldots + p_{m-1}S_3 + p_mS_2 &= 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Такъ какъ $S_{m-1}, S_{m-2}, \ldots S_2, S$ — извѣстны и выражены черезъ коэффиціенты, то первое изъ полученныхъ уравненій дастъ величину S_m черезъ коэффиціенты, второе величину S_{m+1} и т.д.

Узнать симметрическія функціи отрицательныхъ степеней можно, полагая n равнымъ $-1, -2, -3, \ldots$ Соотношеніе (4) дастъ

$$
\begin{aligned}
S_{m-1} + p_1S_{m-2} + p_2S_{m-3} + \ldots + p_{m-1} + p_mS_{-1} &= 0 \\
S_{m-2} + p_1S_{m-3} + p_2S_{m-4} + \ldots + p_{m-1}S_{-1} + p_mS_{-2} &= 0 \\
S_{m-3} + p_1S_{m-4} + p_2S_{m-5} + \ldots + p_{m-1}S_{-2} + p_mS_{-3} &= 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Из первого соотношения после подстановки известных уже функций ξ определится S_{-1}, из второго S_{-2}, и т.д.

§6. Вычисление двойных, тройных и т.д. симметрических функций.

Дано уравнение $f(x)=0$

и пусть его m корней $a, b, c, \ldots k, l$ составлена симметрическая функция двух букв $\sum a^\alpha b^\beta = a^\alpha b^\beta + b^\alpha a^\beta + a^\alpha c^\beta + c^\alpha d^\beta \ldots$, представляющая различные ξ из m по 2; число их по этому есть $m(m-1)$. Пусть S_α означает сумму степеней α всех корней. Если перемножить S_α и S_β, то в произведении получатся члены двоякого типа: во первых произведения одного и того же корня в различных степенях, напр. $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$; они составят сумму $S_{\alpha+\beta}$; во вторых произведения различных корней в степенях α и β, напр. $a^\alpha c^\beta$; они составят сумму $\sum a^\alpha b^\beta$; так что $S_\alpha \cdot S_\beta = \sum a^\alpha b^\beta + S_{\alpha+\beta}$, откуда

$$\sum a^\alpha b^\beta = S_\alpha \cdot S_\beta - S_{\alpha+\beta}$$

но S_α, S_β, $S_{\alpha+\beta}$, как суммы одинаковых степеней одной буквы, выражаются через коэффициенты по формулам Ньютона, а потому, если поставить их значения, то через коэффициенты выразится и $\sum a^\alpha b^\beta$.

Если оба корня, составляющие каждый член, возводятся в одну и ту же степень, т.е. $\alpha=\beta$, то каждому члену типа $a^\alpha b^\beta$ найдется равный член типа $b^\alpha a^\beta$ и множитель 2 смогло будет вынести за скобки $2\sum a^\alpha b^\alpha$. Произведение суммы $S_\alpha \cdot S_\beta$ обратится в квадрат суммы S_α^2; а $S_{\alpha+\beta}$ в $S_{2\alpha}$, так что

$$\sum a^\alpha b^\alpha = \tfrac{1}{2}\left(S_\alpha^2 - S_{2\alpha}\right)$$

S_α и $S_{2\alpha}$ по Ньютону можно выразить через коэффициенты данного уравнения, а след. через коэффициенты оно выразится и $\sum a^\alpha b^\alpha$.

Пример. Вычислить симметрическую функцию:

$$\sum a^2 b = a^2 b + b^2 a + c^2 b \ldots;$$

по сказанному

$$\sum a^2 b = s_2 \cdot s_1 - s_3,$$

а по формуламъ Ньютона

$$s_1 = -p_1\,;\quad s_2 = p_1^2 - 2p_2\,;\quad s_3 = -p^3 + 3p_1p_2 - 3p_3$$

откуда

$$\sum a^2 b = -\cancel{p_1^3} + 2p_1p_2 + \cancel{p_1^3} - 3p_1p_2 + 3p_3$$

или

$$\sum a^2 b = p_1p_2 + 3p_3$$

Измѣреніе обѣихъ частей одинаково, потому что p_1 — сумма первыхъ степеней — множится на p_2 — сумму произведеній по два, а p_3 есть сумма произведеній по три (теор. 4 сл. I).

Тройная симметрическая функція, состоящая изъ членовъ типа $a^\alpha c^\beta k^\gamma$, имѣетъ ихъ $m(m-1)(m-2)$, такъ какъ представляетъ разложеніе ихъ m по 3. Зная величину $\sum a^\alpha b^\beta$, можно получить $\sum a^\alpha b^\beta c^\gamma$ умноженіемъ $\sum a^\alpha b^\beta$ на $s_\gamma = a^\gamma + b^\gamma + c^\gamma + \ldots$; въ произведеніи будутъ находиться члены трехъ типовъ: во первыхъ члены, въ которыхъ корень степени γ различенъ съ корнями степеней α и β, напр. $a^\alpha b^\beta c^\gamma$; во вторыхъ корень степени γ тотъ же, что корень степени α, напр. $b^\alpha c^\beta b^\gamma$; въ третьихъ корень степени γ одинаковъ съ корнемъ степени β, напр. $a^\alpha d^\beta d^\gamma$. Итакъ

$$s_\gamma \cdot \sum a^\alpha b^\beta = \sum a^\alpha b^\beta c^\gamma + \sum a^{\alpha+\gamma} b^\beta + \sum a^\alpha b^{\beta+\gamma}$$

откуда

$$\sum a^\alpha b^\beta c^\gamma = s_\gamma \cdot \sum a^\alpha b^\beta - \sum a^{\alpha+\gamma} b^\beta - \sum a^\alpha b^{\beta+\gamma}$$

Такимъ образомъ тройная функція выразилась черезъ двойныя, которыя выражаются черезъ функціи одной буквы, именно

$$s_\gamma \cdot \sum a^\alpha b^\beta = (s_\alpha \cdot s_\beta - s_{\alpha+\beta})\, s_\gamma$$

$$\sum a^{\alpha+\gamma} b^\beta = s_{\alpha+\gamma} s_\beta - s_{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$\sum a^\alpha b^{\beta+\gamma} = s_\alpha s_{\beta+\gamma} - s_{\alpha+\beta+\gamma}$$

и поэтому

$$\sum a^\alpha b^\beta c^\gamma = s_\alpha s_\beta s_\gamma - s_{\alpha+\beta} s_\gamma - s_{\alpha+\gamma} s_\beta - s_\alpha s_{\beta+\gamma} + 2 s_{\alpha+\beta+\gamma}$$

Послѣдняя формула упрощается, если два изъ показателей α, β, γ, или всѣ три дѣлаются равными между собой. Въ самомъ дѣлѣ, если $\alpha = \beta$, то въ суммѣ $\sum a^\alpha b^\beta c^\gamma$ каждому члену ~~найдется~~ $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ найдется равный $b^\alpha a^\beta c^\gamma$; точно также, если $\alpha = \gamma$, или

$\beta=\gamma$, то члену $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ найдется равный $c^\alpha b^\beta a^\gamma$, или члену $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ найдется равный $a^\alpha c^\beta b^\gamma$; во всѣхъ трехъ случаяхъ множитель 2 выносится за скобку.

$$\sum a^\alpha b^\alpha c^\gamma = \frac{1}{2}\left(S_\alpha^2 S_\gamma - S_{2\alpha} S_\gamma - 2S_{\alpha+\gamma} S_\alpha + 2S_{2\alpha+\gamma}\right)$$
$$\sum a^\alpha b^\beta c^\alpha = \frac{1}{2}\left(S_\alpha^2 S_\beta - S_{2\alpha} S_\beta - 2S_{\alpha+\beta} S_\alpha + 2S_{2\alpha+\beta}\right)$$
$$\sum a^\alpha b^\beta c^\beta = \frac{1}{2}\left(S_\alpha S_\beta^2 - S_{2\beta} S_\alpha - 2S_{\beta+\alpha} S_\beta + 2S_{\alpha+2\beta}\right)$$

Если $\alpha=\beta=\gamma$, то каждому члену $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ въ суммѣ $\sum a^\alpha b^\beta c^\gamma$ найдутся 5 равныхъ: $a^\alpha c^\beta b^\gamma$, $b^\alpha a^\beta c^\gamma$, $b^\alpha c^\beta a^\gamma$, $c^\alpha b^\beta a^\gamma$, $c^\alpha a^\beta b^\gamma$, и множитель 6 вынесется за скобку

$$\sum a^\alpha b^\alpha c^\alpha = \frac{1}{6}\left(S_\alpha^3 - 3S_{2\alpha} S_\alpha + 2S_{3\alpha}\right)$$

Такимъ же образомъ можно вычислить и функцію 4-хъ, 5-ти и т.д. буквъ. Если въ функціи μ буквъ всѣ степени равны между собой, то за скобки вынесется множитель $1.2.3.\ldots.\mu$.

Методъ Ньютона неудобенъ его сложностью; существуютъ другіе способы — болѣе простые — вычисленія симметрическихъ функцій нѣсколькихъ буквъ.

§7. Способъ Варинга вычислять симметрическія функціи.

Пусть уравненіе

$$z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0$$

имѣетъ m корней $a, b, c, \ldots k, l$, пусть V есть какая нибудь однородная цѣлая симметрическая функція этихъ корней. Для простоты разсужденія лучше расположить члены функціи V такъ, что первымъ множителемъ каждаго члена является тотъ корень, степень котораго выше остальныхъ степеней, пусть высшая изъ степеней будетъ α; слѣдующій корень будетъ степени β, равной, или нисшей, чѣмъ α, но высшей, чѣмъ всѣ остальныя. Такимъ образомъ

$$V = A\sum a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots l^\lambda,$$

гдѣ

$$\alpha \geqq \beta \geqq \gamma \geqq \delta \geqq \ldots \geqq \lambda;$$

величина A есть постоянный коэффициентъ.

Если симметрическая функція неоднородна, то $V = A\Sigma a^{\alpha}\dots l^{\lambda}$ служитъ только первымъ членомъ, за которымъ слѣдуютъ другіе низшихъ степеней; при томъ, если функція содержитъ постоянный членъ, то онъ войдетъ до конца и станетъ на мѣсто α/λ, который получится ниже; въ остальномъ разсужденіе Варинга останется тѣмъ же, какъ для однородныхъ, такъ и для неоднородныхъ функцій. Нѣкоторыя изъ величинъ $\alpha, \beta \dots \lambda$ разумѣется могутъ быть нулями.

Надо взять столько коэффиціентовъ $p_1\, p_2 \dots p_m$ даннаго уравненія, сколько корней входитъ въ каждый членъ функціи V. Если возьмутъ всѣ корни, $a, b \dots l$, то возьмутся и всѣ коэффиціенты, если же взято напр. только a, b, c, d, то и изъ коэффиціентовъ нужны только $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$. По теор. 4 стат. I коэффиціенты можно выразить черезъ симметрическія функціи:

$$\begin{aligned}
(-1)\ p_1 &= \Sigma a \\
(-1)^2\ p_2 &= \Sigma ab \\
(-1)^3\ p_3 &= \Sigma abc \\
&\dots\dots\dots\dots \\
(-1)^{m-1}\ p_{m-1} &= \Sigma abc\dots k \\
(-1)^m\ p_m &= abc\dots kl
\end{aligned}$$

Если возвести полученныя равенства соотвѣтственно въ степени $\alpha-\beta,\ \beta-\gamma, \dots\dots k-\lambda, \lambda$, перемножить ихъ всѣ и помножить на коэффиціентъ A, то лѣвая часть будетъ

$$R = A(-1)^{\alpha+\beta+\gamma\dots\dots\lambda} p_1^{\alpha-\beta} p_2^{\beta-\gamma} \dots p_{m-1}^{k-\lambda} p_m^{\lambda}$$

А что касается до первой части, то это будетъ неоднородная симметрическая функція, старшая однородная часть которой равна функціи V, если послѣдняя однородна, и ея старшей однородной части $\Sigma a^{\alpha} b^{\beta} \dots l^{\lambda}$, если V неоднородна. Въ самомъ дѣлѣ Σa въ степени $\alpha-\beta$ содержитъ между прочими членами $a^{\alpha-\beta}, b^{\alpha-\beta}, \dots\dots l^{\alpha-\beta}$; $(\Sigma ab)^{\beta-\gamma}$ между прочимъ содержитъ члены

Лит. Отд. Ген. Штаб. Лекц. Алгеб. Анал.

$(ab)^{\beta-\gamma}$, $(bc)^{\beta-\gamma}$, ...; $(\Sigma abc)^{\gamma-\delta}$ имѣетъ члены $(abc)^{\gamma-\delta}$, $(bcd)^{\gamma-\delta}$, ...
и т. д. Произведеніе $(\Sigma a)^{\alpha-\beta}.(\Sigma ab)^{\beta-\gamma}.(\Sigma abc)^{\gamma-\delta}.....(\Sigma ab..k)^{k-\lambda}.$
$.(abc....kl)^{\lambda}$ дастъ между прочимъ $a^{\alpha-\beta+\beta-\gamma+\gamma+.....-\lambda+\lambda}.$
$.b^{\beta-\gamma+\gamma-.....-\lambda+\lambda}.c^{\gamma-.....-\lambda+\lambda}.....k^{k-\lambda+\lambda}.l^{\lambda}=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}...k^{k}.l^{\lambda},$

а такъ какъ суммы

$$\Sigma a$$
$$\Sigma ab$$
$$.....$$

содержатъ корни a, b, c.... l равноправно, но необходимо въ результатѣ произведенія степеней этихъ суммъ получится между прочимъ

$$A\Sigma a^{\alpha}b^{\beta}.....l^{\lambda}$$

слѣд.

$$R=A\Sigma a^{\alpha}b^{\beta}....l^{\lambda}+...$$

Если вычесть R изъ V, то общая или часть покажетъ и разность V_1 будетъ степени низшей, чѣмъ V:

$$V-R=V_1$$

V_1 есть слѣд. симметрическая неоднородная функція корней степени низш. V. Надъ V_1 можно продѣлать тоже, что надъ V; т. е. взять столько коэффиціентовъ, сколько корней содержится въ V_1, возвести ихъ въ степени $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$, ..., перемножить, назвать результатъ R_1, умножить его на коэффиціентъ при старшей части V_1, вычесть его изъ V_1 и получить такимъ образомъ V_2 — симметрическую неоднородную функцію степени низшей, чѣмъ степень V_1. Надъ V_2 можно опять продѣлать тоже, что надъ V и V_1 и получить въ результатѣ V_3 неоднородную симметрическую функцію степени низшей V_2. Такимъ образомъ

$$V-R=V_1$$
$$V_1-R_1=V_2$$
$$V_2-R_2=V_3$$
$$.....$$
$$V_{\mu-2}-R_{\mu-2}=V_{\mu-1}$$
$$V_{\mu-1}-R_{\mu-1}=V_{\mu}$$

Такъ какъ степень функціи $V, V_1, V_2, \ldots$ постепенно понижается уничтоженіемъ всѣхъ старшихъ членовъ при каждомъ вычитаніи, то необходимо степень въ концѣ концовъ дойдетъ до нуля. Если V было однородно, то свободнаго члена не получится и послѣдняя функція, положимъ V_μ будетъ нулемъ, если же V было неоднородно, то можетъ получится свободный членъ, такъ что $V_\mu = const.$

Если сложить получившіяся равенства, то всѣ функціи начиная съ V, уничтожатся и останется

$$V = R + R_1 + R_2 + \ldots + R_{\mu-1} + V_\mu$$

при чемъ V_μ или нуль, или const. Величины $R, R_1, R_2, \ldots$ суть суммы степеней коэффиціентовъ $p_1, p_2 p_3 \ldots$ даннаго уравненія.

Итакъ мистеръ Варингъ позволяетъ вычислять симметрическія функціи корней непосредственно черезъ коэффиціенты уравненія, не прибѣгая послѣдовательно къ двойнымъ, тройнымъ и т.д. симметрическимъ функціямъ, что необходимо въ способѣ Ньютона.

Примѣръ. Вычислить симметрическую функцію

$$V = \Sigma a^3 bcd$$

корней $abcd \ldots kl$

Высшая степень 3, слѣд. $\alpha = 3, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1$

$$R = (-p_1)^{\alpha-\beta} \cdot p_2^{\beta-\gamma} \cdot p_3^{\gamma-\delta} \cdot p_4^{\delta}$$

или

$$R = (-p_1)^2 p_4$$

или черезъ корни

$$R = (\Sigma a)^2 \cdot \Sigma abcd$$

потомучто $-p_1 = \Sigma a$, $p_4 = \Sigma abcd$; въ $(\Sigma a)^2$ содержатся члены двухъ типовъ: во первыхъ сумма квадратовъ, во вторыхъ сумма двойныхъ произведеній, такъ что

$$R = (\Sigma a^2 + 2\Sigma ab)\Sigma abcd$$

Отъ этого умноженія появятся члены пяти типовъ; въ первыхъ въ разсматриваемомъ членѣ функціи $\Sigma abcd$ существуютъ корни, находящіяся въ разсматриваемомъ членѣ функціи Σ

котр. a^3bcd; вовторыхъ этомъ корень отсутствуетъ, такъ что получится a^2bcde; въ третьихъ членъ суммы $\Sigma abcd$, содержащъ оба корня члена $2\Sigma ab$, тогда будетъ $2a^2b^2cd$; въ четвертыхъ одного изъ корней члена суммы $2\Sigma ab$ не содержится въ членѣ $\Sigma abcd$; такъ что получится a^2bcde; при томъ такихъ членовъ будетъ 4, потомучто изъ $2\Sigma ab$ сложенъ быть или b, или c, или d, или e; слѣд. будетъ $8a^2bcde$; наконецъ въ пятыхъ ни одинъ изъ корней $2\Sigma ab$ не содержится въ членѣ $\Sigma abcd$, т.е. искомый членъ $abcdef$; такихъ будетъ 15, потомучто изъ $2\Sigma ab$ можетъ быть $ab, ac, ad \ldots bc, bd \ldots ef$ — иначе говоря число такихъ членовъ равняется числу сочетаній изъ 6 по 2 $= \frac{m\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} = \frac{6.5}{1.2} = 15$; слѣд. получится $30\,abcdef$. Итакъ

$$R = \Sigma a^3bcd + \Sigma a^3bcde + 2\Sigma a^2b^2cd + 8\Sigma a^2bcde + 30\Sigma abcdef.$$

$$V - R = V_1 = -2\Sigma a^2b^2cd - 9\Sigma a^2bcde - 30\Sigma abcdef.$$

Для V, $\alpha=2, \beta=2, \gamma=1, \delta=1$, потомучто умножая на коэффиціентъ (-2),

$$R_1 = -2(-p_1)^{\alpha-\beta}p_2^{\beta-\gamma}(-p_3)^{\gamma-\delta}p_4^{\delta} = -2p_2p_4 = -2\Sigma ab.\Sigma abcd$$

$$R_1 = -2\Sigma a^2b^2cd - 8\Sigma a^2bcde - 30\Sigma abcdef.$$

$$V_1 - R_1 = V_2 = -\Sigma a^2bcde.$$

Коэффиціентъ $A=-1$, степени $\alpha=2, \beta=1, \gamma=1, \delta=1, \varepsilon=1$, потомучто

$$R_2 = \tfrac{1}{2}(-(-p_1)(-p_3)) = \Sigma a.\Sigma abcde = \Sigma a^2bcde - 6\Sigma abcdef$$

$$V_2 - R_2 = V_3 = 6\Sigma abcdef.$$

Коэффиціентъ $A=6$, $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon=\varphi=1$, потомучто

$$R_3 = 6p_6 = 6\Sigma abcdef.$$

$$V_3 - R_3 = V_4 = 0$$

Отсюда получается величина искомой функціи V.

$$V = R_1 + R_2 + R_3$$

$$V = p_1^2p_4 - 2p_2p_4 - p_1p_5 + 6p_6$$

обѣ части одного измѣренія, именно 6-ой степени; $V_4 = 0$, а не const, потомучто однородно и слѣд. не имѣетъ свободнаго члена.

§8. Составленіе уравненія, отъ котораго зависитъ несимметрическая функція корней даннаго уравненія.

Пусть $a, b, c, \ldots k, l$ будутъ m корней даннаго уравненія $f(x)=0$ и пусть $V = F(a,b,c,\ldots)$ несимметрическая функція этихъ корней. Если она содержитъ n корней, то наибольшее число значеній ея равно числу размѣщеній изъ m по n, т.е.

$$m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1).$$

Потому что отъ перемѣщенія элементовъ $abc\ldots$ функція V, какъ несимметрическая, получаетъ каждый разъ новыя значенія, причемъ перемѣна величины V произойдетъ какъ отъ замѣны одного изъ входящихъ въ нее корней однимъ изъ невходящихъ въ нее, такъ и отъ перемѣны мѣстами двухъ входящихъ корней; слѣд. сбавленіе будетъ здѣсь размѣщеніемъ. Вообще говоря различныхъ значеній V будетъ столько, такъ какъ нѣкоторыя перемѣщенія благодаря свойствамъ данной функціи могутъ дать и одинаковое съ другими значеніе. Пусть V имѣетъ различныхъ значеній μ

$$V_1, V_2, V_3, \ldots\ldots V_\mu$$

Если принять V за перемѣнное, то

$$(V-V_1)(V-V_2)\ldots\ldots(V-V_\mu)=0$$

будетъ служить уравненіемъ, корни котораго суть всѣ μ значеній функціи V. Его можно еще представить въ видѣ

$$V^\mu + P_1 V^{\mu-1} + P_2 V^{\mu-2} + \ldots\ldots + P_{\mu-1} V + P_\mu = 0,$$

при чемъ коэффиціенты по теор. 4 стр. 1 суть

$$\begin{aligned}
&V_1 + V_2 + \ldots\ldots + V_\mu = -P_1,\\
&V_1V_2 + V_1V_3 + \ldots\ldots\ldots = P_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&V_1V_2V_3\ldots\ldots\ldots V_\mu = (-1)^\mu P_\mu
\end{aligned}$$

суть симметрическія функціи корней уравненія относительно V. Но они въ тоже время и симметрическія функціи всѣхъ $abc\ldots$

данного уравненія. Въ самомъ дѣлѣ въ ряду

$$v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots v_\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

содержатся всѣ различныя значенія, какія можетъ принимать v отъ перестановки корней $a, b, \ldots c$; въ каждой изъ коэффиціентовъ входятъ всѣ v и притомъ равноправно; слѣд., если въ одномъ изъ коэффиціентовъ переставить, или замѣнить какіе-нибудь корни, то благодаря этому одни v станутъ на нѣкоторыхъ другихъ, а новыхъ значеній получиться не можетъ; не можетъ также получиться и двухъ равныхъ значеній, потому что каждому значенію v, получившемуся отъ перестановки находится соотвѣтствующій въ ряду (1), и если бы двѣ перестановки два v оказались равными, то и въ ряду (1) необходимо были бы два равныхъ v, чего по предположенію нѣтъ.

А ряъ коэффиціенты $P_1, P_2, \ldots P_\mu$ симметрическія функціи корней даннаго уравненія, то ихъ по одному изъ извѣстныхъ способовъ можно вычислить черезъ коэффиціенты даннаго уравненія $f(z)=0$, и такимъ образомъ составить уравненіе

$$v^\mu + P_1 v^{\mu-1} + P_2 v^{\mu-2} + \ldots + P_\mu = 0$$

рѣшеніе котораго дастъ искомыя величины несимметрической функціи.

§ 9. Преобразованіе уравненій.

Задача преобразованія заключается въ томъ, чтобы найти уравненіе, корни котораго пропорціональны корнямъ даннаго уравненія

$$f(z)=0$$

такъ что вообще ищется уравненіе $F(y)$, корни котораго $y=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ находятся въ опредѣленной зависимости отъ корней z даннаго.

Для этого станутъ рѣшать $y=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ относительно z и подставятъ найденную величину z въ уравненіе $f(z)=0$. Новое уравненіе

$F(u)=0$ имѣетъ столько же корней, сколько $f(z)=0$, при чемъ каждый корень u пропорціоналенъ одному изъ корней z. Замѣтимъ надо замѣтить, что значеніе $u=\sqrt{z}$ недопустимо, такъ какъ тогда каждому значенію z соотвѣтствуютъ два значенія u.

Примѣръ: Дано уравненіе

$$z^3+p_1z^2+p_2z+p_3=0$$

найти новое уравненіе, корни котораго равны квадратамъ корней даннаго, такъ что $u=z^2$, или, если корни перваго a,b,c, то корни втораго a^2,b^2,c^2. Коэффиціенты P_1,P_2,P_3 уравненія

$$u^3+P_1u^2+P_2u+P_3=0$$

опредѣляются по формуламъ Ньютона, черезъ коэффиціенты p_1,p_2,p_3 даннаго:

$$P_1=a^2+b^2+c^2=\Sigma a^2=p_1^2-2p_2$$
$$P_2=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=\Sigma a^2b^2$$
$$P_3=a^2b^2c^2=p_3^2$$

а коэффиціентъ P_2, какъ двойную симметрическую функцію, можно вычислить способомъ Варинга черезъ p_1,p_2,p_3. Въ данномъ случаѣ

$$V=\Sigma a^2b^2;$$

входящія въ нее двѣ степени равны между собой, такъ что $\alpha=2,\beta=2$,

$$R=(-1)^{2+2}p_1^{\alpha-\beta}p_2^{\beta}=p_2^2$$

но $p_2=\Sigma ab$, и слѣд.

$$R=p_2^2=(\Sigma ab)^2=\Sigma a^2b^2+2\Sigma a^2bc$$

откуда

$$V-R=-2\Sigma a^2bc=V_1,$$

гдѣ V_1 степени такія $\alpha=2,\beta=1,\gamma=1$, коэффиціентъ $A=-2$, и слѣд.

$$R_1=-2(-1)^{2+1+1}p_1^{\alpha-\beta}p_2^{\beta-\gamma}p_3^{\gamma}=-2p_1p_3$$
$$R_1=-2abc.\Sigma a=-2\Sigma a^2bc$$
$$V_1-R_1=V_2=0$$
$$V=\Sigma a^2b^2=R+R_1=p_2^2-2p_1p_3=P_2;$$

коэффиціенты вычислены, остается ихъ подставить въ уравненіе и оно будетъ имѣть требуемые корни $a^2b^2c^2$, именно

$$u^3+(p_1^2-2p_2)u^2+(p_2^2-2p_1p_3)u+p_3^2=0.$$

Оно той же степени, что и данное.

Теорема 8. Дробной функціи $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ корней даннаго уравненія $f(z)=0$ m-ой степени можно найти равную цѣлую степени ниже m.

Множа и дѣля дробную функцію на функцію ψ остальныхъ корней, можно получить такое тождество.

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \varphi(a)\,\frac{\psi(b)\cdot\psi(c)\ldots\ldots\psi(l)}{\psi(a)\cdot\psi(b)\cdot\psi(c)\ldots\psi(l)}$$

Знаменатель второй части представляетъ симметрическую функцію корней даннаго уравненія, и слѣд. можетъ быть выражена черезъ его коэффиціенты, т. е. представитъ уже не функцію, а постоянное количество; а множитель числителя $\psi(b)\ldots\psi(b)$ есть симметрическая функція корней уравненія

$$\frac{f(z)}{z-a}=0$$

имѣющаго всѣ корни даннаго кромѣ одного; ее можно выразить слѣд. черезъ коэффиціенты этого уравненія, которые въ свою очередь выражаются черезъ коэффиціенты даннаго и черезъ корень a, такъ что

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \varphi(a)\cdot\theta(a)$$

гдѣ $\theta(a)$ есть цѣлая функція корня a, потомучто, если осуществить дѣленіе $\frac{f(z)}{z-a}$, то a будетъ входить только въ числителѣ; остатка не получится, потомучто $f(z)$ дѣлится на биномъ $(z-a)$ (т. к.)

Если осуществить дѣленіе $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$, то получится

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots + A_\mu a^\mu,$$

при чемъ μ всегда можно сдѣлать меньшимъ m. Пусть $\mu = m+n$; тогда всѣ степени a, высшія, чѣмъ $m-1$ можно цѣлымъ образомъ выразить черезъ нисшія степени. Въ самомъ дѣлѣ, перенесеніемъ въ $f(z)=0$ старшаго члена въ другую часть опредѣлится степень m; если умножить $f(a)$ на a, то $m+1$-ая степень a выразится черезъ m-ую и нисшія степени; дальнѣйшее умноженіе на a дастъ $m+2$ степень и всѣ остальныя. Остается ихъ подставить въ функцію $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ и она окажется въ крайнемъ случаѣ степени $m-1$.

§ 10. Уравненіе по квадратамъ разностей.

Пусть $a, b, c, \ldots k, l$ корни уравненія $f(z)=0$. Надо вычислить несимметрическую функцію ихъ, представляющую квадратъ разности двухъ корней

$$v = (a-b)^2$$

Можно было бы составить уравненіе, корнями котораго служатъ всѣ значенія v, способомъ, изложеннымъ въ § 8, но для даннаго частнаго случая несимметрической функціи существуетъ болѣе простой способъ.

Число различныхъ значеній v есть число сочетаній изъ m по 2, т.е. $\mu = \frac{m(m-1)}{2}$, потому что v симметрично относительно двухъ корней въ него входящихъ, т.е. $(a-b)^2 = (b-a)^2$, и слѣд. соединеніе здѣсь является не размѣщеніемъ, а сочетаніемъ. Степень уравненія относительно v будетъ тоже μ. Итакъ, надо узнать коэффиціенты уравненія

$$v^\mu + P_1 v^{\mu-1} + P_2 v^{\mu-2} + \ldots\ldots + P_{\mu-1} v + P_\mu = 0$$

Они представляютъ (теор. 4. Слѣд. I) симметрическія функціи корней $v_1 v_2 \ldots\ldots v_\mu$, и ихъ можно по формуламъ Ньютона вычислить черезъ суммы одинаковыхъ степеней $S_1 = v_1 + v_2 + \ldots v_\mu$; $S_2 = v_1^2 + v_2^2 + \ldots v_\mu^2$; $\ldots\ldots$; $S_\mu = v_1^\mu + v_2^\mu + \ldots + v_\mu^\mu$, если послѣднія извѣстны.

Слѣдующій способъ даетъ возможность вычислить $S_1 S_2 \ldots\ldots S_\mu$ черезъ $s_1 s_2 \ldots\ldots$ — суммы одинаковыхъ степеней корней $a, b, c, \ldots k, l$ даннаго уравненія. Но вѣдь по способу $s_1 s_2 \ldots\ldots$ выражаются черезъ коэффиціенты $p_1 p_2 \ldots p_m$ даннаго уравненія $f(z)=0$. Такимъ образомъ $P_1 P_2 \ldots P_\mu$ можно вычислить черезъ $\sum v_1$; $\sum v_1 v_2, \ldots$; $v_1 v_2 \ldots v_\mu$; $\sum v_1, \ldots$ черезъ $s_1 s_2 \ldots$; $s_1 s_2 \ldots$ по ниже слѣдующему способу Лагранжа черезъ $s_1 s_2 \ldots$; наконецъ $s_1 s_2 \ldots$ черезъ $p_1 p_2 \ldots p_m$; т.е. коэффиціенты $P_1 P_2 \ldots P_\mu$ выразятся черезъ $p_1 p_2 \ldots p_m$ и уравненіе будетъ опредѣлено

Способъ Лагранжа состоитъ вотъ въ чемъ.

Пусть

$$\varphi(z) = (z-a)^{2n} + (z-b)^{2n} + \dots + (z-l)^{2n}$$

есть функція z, представляющая сумму одинаковыхъ четныхъ степеней разностей $(z-a), (z-b) \dots$ Если дать z послѣдовательно значенія корней $a, b, c, \dots k, l$, и сложить результаты подстановокъ

$$\begin{aligned}\varphi(a) + \varphi(b) + \dots + \varphi(l) = {} & (a-b)^{2n} + (a-c)^{2n} + \dots\dots + (a-l)^{2n} + \\ & + (b-a)^{2n} + \dots\dots\dots\dots + (b-l)^{2n} + \\ & + (c-a)^{2n} + \dots\dots\dots\dots + (c-l)^{2n} + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + (l-a)^{2n} + (l-b)^{2n} + (l-c)^{2n} + \dots\dots\end{aligned}$$

то во второй части степень каждой разности входитъ два раза, а самыя разности представляютъ n-ую степень функціи V, такъ что вторая часть представляетъ $2S_n$ полную сумму n-ыхъ степеней V:

$$2S_n = \varphi(a) + \varphi(b) + \dots\dots + \varphi(l)$$

Съ другой стороны $\varphi(z)$ въ раскрытомъ видѣ будетъ

$$\begin{aligned}\varphi(z) = {} & z^{2n} - 2na z^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} a^2 z^{2n-2} - \dots\dots + a^{2n} + \\ & + z^{2n} - 2nb z^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} b^2 z^{2n-2} - \dots\dots + b^{2n} + \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + z^{2n} - 2nl z^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} l^2 z^{2n-2} - \dots\dots + l^{2n}.\end{aligned}$$

или $$\varphi(z) = mz^{2n} - 2nS_1 z^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} S_2 z^{2n-2} - \dots\dots + S_{2n}$$

Отсюда, замѣнивъ z послѣдовательно чрезъ $a, b, \dots k, l$, опредѣлимъ сумму $\varphi(a) + \varphi(b) + \dots \varphi(l)$, равную, какъ уже сказано, $2S_n$. Итакъ

$$\begin{aligned}2S_n = {} & ma^{2n} - 2nS_1 a^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} S_2 a^{2n-2} - \dots + S_{2n} + \\ & + mb^{2n} - 2nS_1 b^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} S_2 b^{2n-2} - \dots + S_{2n} + \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + ml^{2n} - 2nS_1 l^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} S_2 l^{2n-2} - \dots + S_{2n}\end{aligned}$$

или $$2S_n = mS_{2n} - 2nS_1 S_{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{2.2} S_2 S_{2n-2} - \dots + mS_{2n}$$

Члены одинаково удаленные отъ концовъ послѣдней формулы, равны между собой; при томъ у нея необходимо есть средній членъ, который не раздѣлится на 2, когда на 2 раздѣлится вся формула, потому что сумма показателей при S въ каждомъ членѣ равна $2n$ и слѣд. существуетъ

единственный член вида

$$\frac{2n(2n-1)\ldots\ldots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots n} s_n s_n$$

а поэтому последняя формула, данная на 2 будет

$$S_n = m s_{2n} - 2n s_1 s_{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2} s_2 s_{2n-2} - \ldots \pm \frac{1}{2}\cdot\frac{2n(2n-1)-(n+1)}{1\cdot 2\ldots n} s_n^2$$

Вопрос решен, полагаю, если в последней формуле подставить последовательно вместо n ряд чисел $1, 2, 3, \ldots \mu$, то суммы $S_1 S_2 S_3 \ldots S_\mu$ выразятся через суммы $s_1, s_2 s_3 \ldots$, и след. коэффициенты $P_1, P_2 \ldots P_\mu$ уравнения по квадратам разностей можно будет определить через коэффициенты $p_1 p_2 \ldots p_m$ данного уравнения $f(x)=0$

Замечание. Некоторые из корней $a, b \ldots k, l$ могут быть равны друг другу, но это сейчас не обнаружится из вида уравнения

$$V_\mu + P_1 V_{\mu-1} + \ldots + P_\mu = 0$$

ибо, если есть два равных корня, то $P_\mu = 0$, если есть трехкратный корень, то и $P_{\mu-1} = 0$, если четырехкратный, то и $P_{\mu-2} = 0$ и т.д.

В самом деле, последний член представляет произведение квадратов разностей корней

$$P_\mu = \pm (a-b)^2 (a-c)^2 \ldots\ldots (k-l)^2$$

и если два какие нибудь корня равны между собой, напр. $a=c$, то им. разность, а след. и P_μ обращается в нуль; далее

$$P_{\mu-1} = \sum_{\mu-1} (a-b)^2 \ldots\ldots (i-l)^2$$

в каждом члене этой суммы не хватает одного корня V_1, и чтобы $P_{\mu-1}$ обратилось в нуль, должны быть равными три корня, напр. $a=b=k$, таким же образом, чтобы

$$P_{\mu-2} = \sum_{\mu-2} (a-b)^2 \ldots\ldots (h-l)^2$$

обратилось в нуль, нужно, чтобы четыре корня равных $a=b=j=k$, и т.д.

Можно также самое доказательство построить с помощью детерминантов. Произведение $(a-b)(a-c)\ldots(b-c)\ldots\ldots(k-l)$ можно представить так:

$$(a-b)(a-c)\ldots\ldots(k-l) = \begin{vmatrix} a^{n-1} & b^{n-1} & \ldots\ldots & l^{n-1} \\ a^{n-2} & b^{n-2} & \ldots\ldots & l^{n-2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a & b & \ldots\ldots & l \\ 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \end{vmatrix} = D$$

В самомъ дѣлѣ, при $a=b$ два столбца Δ дѣлаются равными и Δ обращается въ нуль, а это можетъ случиться лишь тогда, когда Δ содержитъ множителемъ разность $a-b$. По той же причинѣ онъ содержитъ множителями и всѣ остальныя разности. Кромѣ того Δ не можетъ содержать кромѣ этихъ разностей никакихъ множителей, въ которые входятъ величины $a, b, \ldots k, l$, поэтому произведеніе

$$(a-b)(a-b)\ldots\ldots(k-l)$$

содержитъ $a^{m-1}b^{m-1}\ldots\ldots l^{m-1}$ а Δ не имѣетъ степеней, выше этихъ.

Произведеніе двухъ детерминантовъ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

равно детерминанту, элементы первой строки котораго суть суммы произведеній элементовъ первой строки 1-го детерминантовъ на соотвѣтственные элементы всѣхъ строкъ втораго; вторая строка — элементы второй строки перваго детерм. на соотвѣтственные элементы всѣхъ строкъ второго; третья строка — элементы третьей строки перваго на элементы всѣхъ строкъ второго.

Если ~~возводить~~ приходится возводить детерминантъ въ квадратъ, то соотвѣтственные элементы становятся равными $\alpha_1=a_1$, $\beta_2=b_2$ ..... и результатъ получится такой:

$$\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2+c_1^2 & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_2^2+b_2^2+c_2^2 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 \\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 & a_3^2+b_3^2+c_3^2 \end{vmatrix}$$

Для даннаго случая приходится возводить въ квадратъ, чтобы получить R_μ, детерминантъ

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a & b & c & \dots & k & l \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots & k^2 & l^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{m-2} & b^{m-2} & c^{m-2} & \dots & k^{m-2} & l^{m-2} \\ a^{m-1} & b^{m-1} & c^{m-1} & \dots & k^{m-1} & l^{m-1} \end{vmatrix}$$

Діагональ результата представитъ суммы квадратовъ элементовъ соотвѣтственныхъ строкъ, такъ что первый элементъ діагонали будетъ $1^2+1^2\dots = m$, второй — $a^2+b^2+\dots = S_2$, третій S_4 и т.д., послѣдній $a^{(m-1)2}+b^{(m-1)2}+\dots = S_{2m-2}$. Элементы первой строки и перваго столбца будутъ: второй — сумма произведеній элементовъ первой строки на элементы второй, т.е. $a+b+c\dots = S_1$; третій — элементы первой строки на элементы третьей т.е. $a^2+b^2\dots = S_2$ и т.д. Элементы второй строки и второго столбца будутъ: третій — сумма произведеній элементовъ второй строки на элементы третьей, т.е. $a^3+b^3+c^3+\dots = S_3$ и т.д. Итакъ

$$\mathcal{D}^2 = \begin{vmatrix} m & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \cdot & \cdot & S_{m-2} & S_{m-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \cdot & \cdot & \cdot & S_{m-1} & S_m \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & \cdot & \cdot & \cdot & S_m & S_{m+1} \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & \cdot & \cdot & \cdot & S_{m+1} & S_{m+2} \\ S_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{m-2} & S_{m-1} & S_m & S_{m+1} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{2m-2} & S_{2m-1} \\ S_{m-1} & S_m & S_{m+1} & S_{m+2} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{2m-1} & S_{2m-2} \end{vmatrix} = P_\mu$$

Такимъ же образомъ можно представить и остальные коэффиціенты.

§ 11. Исключеніе неизвѣстнаго изъ уравненія съ помощью симметрическихъ функцій.

Пусть

$$f(y) \equiv y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \dots + p_{m-1} y + p_m = 0$$

и $$F(y) \equiv y^n + q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \ldots\ldots + q_{n-1} y + q_n = 0$$

два уравненія одно степени m, имѣющее корни $a, b, c \ldots k, l$, другое степени n, имѣющее корни $a'b'c' \ldots k'l'$; коэффиціенты ихъ $p_1 p_2 p_3 \ldots p_m$ $q_1 q_2 q_3 \ldots q_n$ суть сами суть функціи другихъ перемѣнныхъ $x, z, \ldots$, причемъ степень ихъ служитъ показателемъ въ каждомъ членѣ ихъ степени y; корни уравненій благодаря этому не постоянныя величины, а зависятъ отъ $x \ldots$, поэтому можно подобрать такую величину x, что корни уравненій $f(y)=0$ и $F(y)=0$ будутъ общіе; иначе, можно составить уравненіе относительно x, корнями котораго служатъ такія значенія x, при которыхъ данныя уравненія имѣютъ общіе корни. Такое уравненіе называется результантомъ.

Если въ $F(y)$ подставить корни уравненія $f(y)=0$

$$\begin{aligned} &a^n + q_1 a^{n-1} + q_2 a^{n-2} + \ldots\ldots + q_n \\ &b^n + q_1 b^{n-1} + q_2 b^{n-2} + \ldots\ldots + q_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &l^n + q_1 l^{n-1} + q_2 l^{n-2} + \ldots\ldots + q_n \end{aligned} \qquad (1)$$

и перемножить результаты подстановокъ, то произведеніе, приравненное нулю, и будетъ результантъ

$$R(x) = F(a) \cdot F(b) \cdot F(c) \ldots F(l) = 0,$$

потомучто это есть условіе, при которомъ корни уравненія $f(y)=0$ приводятъ къ нулю $F(y)$, т.е. служатъ его корнями. Это уравненіе содержитъ коэффиціенты $q_1, q_2 \ldots$

Результантъ можно также получить, подставляя корни второго въ первое уравненіе и перемножая такимъ же образомъ.

$$R(x) \equiv f(a') \cdot f(b') \cdot f(c') \ldots f(k') \cdot f(l') = 0 \qquad (2)$$

Результантъ представляетъ симметрическую функцію — въ первомъ случаѣ корней $a, b, c \ldots k, l$ и слѣд. можетъ быть выраженъ черезъ коэффиціенты $p_1 p_2 \ldots p_m$, коэффиціенты же $q_1 q_2 \ldots q_n$ онъ уже содержитъ; во второмъ случаѣ — корней $a'b'c' \ldots k'l'$ и можетъ быть выраженъ черезъ коэффиціенты $q_1 q_2 q_3 \ldots q_n$, а коэффиціенты $p_1 p_2 \ldots p_m$

онъ содержитъ уже.

Итакъ $R(x)=0$ выражается всегда черезъ коэффиціенты $p_1 p_2 \dots p_m$ $q_1 q_2 \dots q_n$. Коэффиціенты эти суть функціи перемѣннаго x, при чемъ степень x во всякомъ коэффиціентѣ, какъ дополнительная до m къ степени y, равна индексу даннаго коэффиціента.

Степень результанта относительно x опредѣлится изъ слѣдующихъ соображеній. Если дѣйствительно перемножить результаты подстановокъ

$$\begin{array}{l} a^n + q_1 a^{n-1} + q_2 a^{n-2} + \dots + q_\alpha a^{n-\alpha} + q_\beta a^{n-\beta} + \dots + q_n \\ b^n + q_1 b^{n-1} + q_2 b^{n-2} + \dots + q_\alpha b^{n-\alpha} + q_\beta b^{n-\beta} + \dots + q_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l^n + q_1 l^{n-1} + q_2 l^{n-2} + \dots + q_\alpha l^{n-\alpha} + q_\beta l^{n-\beta} + \dots + q_n \end{array} \quad \dots (1)$$

то получится сумма членовъ

$$R(x) \equiv \sum q_\alpha q_\beta \dots q_\lambda a^{n-\alpha} b^{n-\beta} c^{n-\gamma} \dots l^{n-\lambda} = 0$$

Такъ какъ въ каждую строку (1) входитъ только одинъ корень, то въ каждый членъ суммы войдутъ непремѣнно всѣ m корней $a, b, \dots k, l$ и только по одному разу. Степень каждаго корня можетъ быть какой угодно въ предѣлахъ отъ n до нуля; она совершенно не зависитъ отъ степени другихъ корней, входящихъ въ тотъ-же членъ, такъ что степени корней въ членѣ могутъ быть всѣ разныя и всѣ одинаковыя. Такъ какъ въ (1) каждый корень сопровождается коэффиціентомъ q степени по x дополнительной до n къ степени корня, то и въ членѣ суммы корень сопровождается коэффиціентомъ и сумма ихъ степеней равна n. Самая сумма есть симметрическая функція корней $a, b, \dots l$, потому что корни эти входятъ въ (1) совершенно равноправно; при томъ это не однородная функція, потому что различные члены ея различныхъ степеней относительно корней. Если же принять во вниманіе и степень x въ коэффиціенты, то каждый членъ суммы окажется степени mn, потому что относительно корней онъ степени $n-\alpha+n-\beta+n-\gamma+\dots+n-\lambda$, или, такъ какъ число кор-

ней есть m, то $m.n-(\alpha+\beta+\gamma+\dots+\lambda)$, а относительно x онъ степени $(\alpha+\beta+\gamma+\dots+\lambda)$, потому индексъ (q) дополнитъ его до степени того корня, при которомъ стоитъ q. Итакъ, въ общемъ степень члена суммы есть $mn-(\alpha+\beta+\gamma+\dots+\lambda)+(\alpha+\beta+\gamma+\dots+\lambda)=m.n$ относительно корней и относительно x.

Если доказать теперь, что въ сумму

$$\Sigma\, q_\alpha \dots q_\lambda a^{n-\alpha} b^{n-\beta} \dots\dots c^{n-\lambda}$$

входитъ x чрезъ корни a,b,c въ степени $n-\alpha+n-\beta+\dots+n-\lambda=mn-(\alpha+\beta+\dots+\lambda)$, т.е. въ той же степени, въ какой входятъ корни, то этимъ докажется, что степень суммы относительно x (входящаго въ нее и чрезъ коэффиціенты и чрезъ корни) есть $m.n$.

Сумма есть, какъ сказано, симметрическая функція относительно корней; по §6 ее можно выразить чрезъ простѣйшія симметрическія функціи $S_\alpha S_\beta \dots S_\lambda$, при чемъ степень суммы остается прежней; а по способу Ньютона суммы одинаковыхъ степеней можно выразить (§5) чрезъ коэффиціенты $p_1, p_2 \dots p_m$ уравненія $f(y)=0$, при чемъ индексы этихъ коэффиціентовъ не превосходятъ степени $S_\alpha S_\beta \dots S_\lambda$

Но индексъ коэффиціента показываетъ въ какой степени входитъ въ него x. Итакъ x чрезъ корни $a,b,\dots\dots l$ войдетъ въ той же степени, въ какой входятъ $a,b\dots l$, и слѣд. результантъ относительно x имѣетъ степень $m.n$.

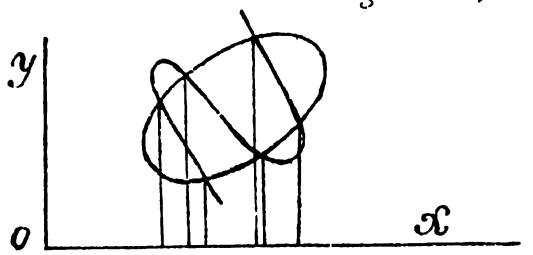
Тоже самое можно бы было представить и съ другимъ выраженіемъ того же результанта, т.е. съ $f(a').f(b').\dots\dots f(l')=Q$, представляющимъ произведеніе выраженій

$$a'^n + p_1 a'^{n-1} + \dots\dots + p_{\alpha'} a'^{n-\alpha'} + p_{\beta'} a'^{n-\beta'} + \dots\dots + p_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$l'^n + p_1 l'^{n-1} + \dots\dots + p_{\alpha'} l'^{n-\alpha'} + p_{\beta'} l'^{n-\beta'} + \dots\dots + p_n$$

и убѣдиться, что и онъ степени mn относительно x

Теоріе о результантѣ и его степени можно геометрически иллюстрировать. Если даны двѣ кривыя m-аго и n-аго поряд-

ковъ, въ координатной системѣ XOY, то общими корнями ихъ будутъ



точки ихъ пересѣченія, потомучто тогда однѣ и тѣ-же величины x и y удовлетворяютъ обѣимъ кривымъ. Найти общіе корни, значитъ найти всѣ величины x, для которыхъ y общее обѣимъ кривымъ. Найти результантъ, значитъ найти кривую, проходящую черезъ всѣ точки пересѣченія двухъ данныхъ.

§ 12. Примѣненіе метода исключеній къ освобожденію отъ радикаловъ.

Дано уравненіе

$$f(x, R_p, R_q, R_2 \ldots) = 0$$

лѣвая часть котораго есть функція x и нѣсколькихъ радикаловъ $R_p, R_q \ldots$ Чтобы освободить отъ нихъ уравненіе надо обозначить радикалы новыми перемѣнными, такъ что $R_p = y$, $R_q = z$, $R_2 = t$. Функція принимаетъ благодаря этому раціональный видъ

$$f(x, y, z, t \ldots) = 0$$

и является еще рядъ уравненій благодаря возведенію въ соотвѣтствующія степени предыдущихъ равенствъ, такъ что

$$y^p = R_p^p$$
$$z^q = R_q^q$$
$$t^2 = R_2^2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Уравненія эти раціональны, потомучто m-ый корень въ степени m есть раціональное число; изъ нихъ опредѣляются перемѣнныя $y, z, t \ldots$ Если эти перемѣнныя исключить изъ преобразованнаго уравненія и уравненій от-

Лит. Общ. Распр. Полезн. Книгъ.

носительно вводныхъ перемѣнныхъ, то въ результатѣ получится уравненіе $f(x)=0$, свободное отъ радикаловъ; они замѣнятся раціональными выраженіями, опредѣляемыми изъ уравненій относительно $y^p, z^q, \ldots$

§ 13. Примѣненіе способа исключенія къ преобразованію уравненій.

Дано уравненіе

$$f(z) \equiv z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \ldots + p_m = 0$$

въ которое нужно подставить вмѣсто z другую величину. Особенно важно бываетъ введеніе величины цѣлой и раціональной

$$\varphi(z) \equiv u \equiv a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n,$$

при чемъ $n < m$. Если бы изъ послѣдняго уравненія нужно было опредѣлить z, то оно дало бы n значеній, но теперь опредѣляется не z, но такія u, которыя соотвѣтствуютъ каждому корню z. Если же подставить вмѣсто z его корень, то правая часть уравненія, а слѣд. и u получитъ одно вполнѣ опредѣленное значеніе. Корней n, поэтому уравненіе $\varphi(z)$ дастъ n значеній u.

Остается исключить z изъ уравненій $f(z)$ и $\varphi(z)$, чтобы получить уравненіе относительно u, но степень его будетъ не $m.n$, какъ надо было ожидать, а останется прежней — m, именно благодаря тому, что z имѣетъ m значеній, а каждому z соотвѣтствуетъ одно опредѣленное u.

Выгода такого преобразованія заключается въ томъ, что степень уравненія не повысилась, а между тѣмъ явились неопредѣленные коэффиціенты $a_0 a_1 a_2 \ldots a_n$ которыми можно воспользоваться, давая имъ то, или другое значеніе, для упрощенія даннаго уравненія.

§ 14. Алгебраическое рѣшеніе уравненій. Рѣшеніе уравненій двухчленныхъ.

Двучленнымъ называется уравненіе, состоящее изъ нѣкоторой

степени перемѣннаго и изъ извѣстнаго члена. Общій видъ его есть

$$z^m = A \quad \text{или} \quad z = \sqrt[m]{A}$$

Такое уравненіе, какъ будетъ показано дальше, имѣетъ m различныхъ корней. Что всѣ корни различны видно изъ формулы его производной

$$m.z^{m-1} = 0,$$

которая удовлетворяется только значеніями $z=0$, и если A не нуль, то двучленное уравненіе не имѣетъ общихъ корней съ производной, т.е. не имѣетъ кратныхъ корней — всѣ корни различны.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ корни двучленнаго уравненія, т.е.

$$\alpha^m = A; \quad \beta^m = A; \quad \gamma^m = A; \ldots$$

или иначе

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m = 1; \quad \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^m = 1; \ldots$$

Пусть

$$u = \frac{\alpha}{\beta} = \sqrt[m]{1}; \text{ или } u^m = 1,$$

тогда

$$\alpha = \beta.u; \quad \beta = \gamma.u; \ldots$$

Иначе говоря, рѣшеніе двучленнаго уравненія сводится къ рѣшенію уравненія $z^m = 1$; потому что надо получить только одинъ корень уравненія $z^m = A$, остальные же получатся умноженіемъ этого корня на u — корень уравненія $z^m = 1$; если извѣстенъ напр. корень λ, то остальные $k = \lambda.u \ldots \beta = \gamma.u$; $\alpha = \beta.u$; итакъ, надо рѣшить двучленное уравненіе, имѣющее извѣстнымъ членомъ единицу. $z^m = 1$.

<u>Теорема 9.</u> Если уравненія $z^m = 1$ и $z^n = 1$ имѣютъ общій корень, то этотъ корень принадлежитъ и уравненію $z^d = 0$, гдѣ d есть общій наибольшій дѣлитель m и n.

Пусть α есть корень, общій разсматриваемымъ уравненіямъ, такъ что

$$\alpha^m = 1 \quad \text{и} \quad \alpha^n = 1$$

и пусть $m > n$. Если q есть частное отъ дѣленія m на n, r — остатокъ, такъ что $m = nq + r$, то

$$\alpha^{nq+r} = 1, \quad \text{или} \quad \alpha^{nq}.\alpha^r = 1,$$

а такъ какъ $\alpha^n = 1$, то и α^n въ степени q тоже равно 1, откуда

$$\alpha^r = 1,$$

т.е. корень, общій двумъ двучленнымъ уравненіямъ, служитъ корнемъ двучленнаго уравненія степени, равной остатку r. Такимъ образомъ

$$\alpha^r = 1; \quad \alpha^{r'} = 1; \ldots\ldots \alpha^d = 1;$$

гдѣ $r, r' \ldots d$ — остатки, получаемые при отыскиваніи общаго наибольшаго дѣлителя между m и n.

Итакъ, всякій корень, общій уравненіямъ $z^m = 1$ и $z^n = 1$, служитъ корнемъ уравненія $z^d = 1$, гдѣ d — общій наибольшій дѣлитель чиселъ m и n.

<u>Слѣдствіе I.</u> Если m и n числа взаимно простыя, то ур-нія

$$z^m = 1 \quad \text{и} \quad z^n = 1$$

не имѣютъ общихъ корней, кромѣ единицы, потому что общій наибольшій дѣлитель m и n есть 1, и, слѣд. они имѣютъ общіе корни съ уравненіемъ $z = 1$.

<u>Слѣдствіе II</u> Если m есть первоначальное число, то уравненіе $z^m = 1$ не имѣетъ общихъ корней ни съ однимъ изъ уравненій низшей степени.

<u>Теорема 10.</u> Если α служитъ корнемъ уравненія $z^m = 1$, то его корнемъ служитъ и всякая степень α.

Въ самомъ дѣлѣ, если $z^m = 1$ и $\alpha^m = 1$, то и $(\alpha^m)^p = 1$, иначе говоря $\alpha^{mp} = 1$, или $(\alpha^p)^m = 1$. Каково бы ни было p, это равенство существуетъ, т.е. α^p служитъ корнемъ. Если α — корень, то $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^\infty$ тоже корни.

Такъ какъ

$$\alpha^m = 1, \ \alpha^{m+1} = \alpha, \ \alpha^{m+2} = \alpha^2, \ \alpha^{m+3} = \alpha^3, \ldots\ldots$$

то рядъ $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^\infty$ содержитъ самое большее m различныхъ чиселъ, а далѣе начинаютъ повторяться прежнія, и если m число первое, то всѣ m этихъ чиселъ различны.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$\alpha^{n+n'} = \alpha^{n'},$$

[illegible]

гдѣ n' и $n+n'$ числа меньшія m; можно сократить по $\alpha^{n'}$, и тогда окажется, что

$$\alpha^n = 1,$$

т.е. уравненіе $z^m = 1$ имѣетъ общіе корни съ уравненіемъ низшей степени, чего быть не можетъ, такъ какъ m число первое.

Итакъ, уравненіе $z^m = 1$ имѣетъ m различныхъ корней, при чемъ всѣ они суть различныя степени любого изъ нихъ.

Первообразным корнем уравнения $x^m = 1$ называется такой корень, который не удовлетворяет ни одному обращенному уравнению низшей степени, и различные степени которого дают все m корней данного уравнения. Очевидно, что если m число нечетное, то все корни его, кроме единицы первообразные, если же m составное число, то первообразные корни надо отыскать.

Пример. Уравнение $x^6 = 1$ имеет составную степень, поэтому его можно представить, как произведение суммы на разность

$$x^6 - 1 \equiv (x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0$$

Корни каждого из составляющих многочленов очевидно служат корнями данного.

Уравнение $x^3 - 1 = 0$ можно представить в виде

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

и удовлетворить ему, полагая $x = 1$, или же $x^2 + x + 1 = 0$. Из последнего уравнения $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$. След. x имеет три корня

$$\sqrt[3]{1} = \alpha = 1, \quad \beta = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \gamma = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

Уравнение $x^3 + 1 = 0$ можно написать так

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

и удовлетворить его, полагая $x = -1$, или $x^2 - x + 1 = 0$. Последнее уравнение дает $x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, а потому $\sqrt[3]{-1}$ имеет также 3 корня

$$\delta = -1, \quad \varepsilon = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}, \quad \eta = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Первообразными корнями уравнения $x^6 - 1 = 0$ служат ε и η, потому что α удовлетворяет уравнению первой степени $x = 1$, δ — уравнению второй степени $x^2 = 1$, β и γ — уравнению третьей $x^3 = 1$, и только ε и η не удовлетворяют ни одному обращенному уравнению степени низшей, чем 6. Они удовлетворяют уравнению $x^3 = -1$, но оно не двучленное, так как во второй части стоит не положительная, а отрицательная единица.

Итак уравнение $x^6 = 1$ имеет два первообразных корня $\varepsilon = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$, $\eta = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$. Возведение одного из них в различные степени дает все остальные корни уравнения, напр.

$$\varepsilon = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{-3}-3}{4} = \frac{-1-\sqrt{-8}}{2} = \gamma$$

$$\varepsilon^3 = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon = \frac{-3-1}{4} = -1 = \delta$$

$$\varepsilon^4 = (\varepsilon^2)^2 = \frac{1+2\sqrt{-3}-3}{4} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \beta$$

$$\varepsilon^5 = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon^3 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}(-1) = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} = \eta$$

$$\varepsilon^6 = (\varepsilon^3)^2 = (-1)^2 = 1 = \alpha.$$

<u>Число первообразных корней двучленного уравнения.</u> Этот вопрос можетъ быть разбитъ на три случая

1) Уравненіе $x^m = 1$, гдѣ m первоначальное число, какъ уже сказано имѣетъ $m-1$ первообразныхъ корней — всѣ кромѣ единицы.

2) Степень m уравненія есть первоначальное число p въ степени μ. $m = p^\mu$. Всякій первообразный корень уравненія $x^{p^\mu} = 1$ долженъ разить уравненіе $x^d = 1$, гдѣ d есть одинъ изъ дѣлителей величины p^μ, но всякій дѣлитель p^μ, кромѣ самаго p^μ долженъ дѣлить и $p^{\mu-1}$, потомучто p — число первое. Итакъ, всѣ не первообразные корни даннаго уравненія должны принадлежать и уравненію

$$x^{p^{\mu-1}} = 1$$

послѣднее имѣетъ $p^{\mu-1}$ корней; всѣ они суть не первообразные корни даннаго; всѣхъ корней даннаго p^μ, слѣд. первообразныхъ

$$p^\mu - p^{\mu-1} = p^\mu\left(1-\frac{1}{p}\right) = m\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

3) Степень m представляетъ произведеніе степеней первоначальныхъ чиселъ; $m = p^\mu q^\nu \ldots r^\varkappa$. Эта величина выражаетъ любое составное число. Первое изъ уравненій

$$x^{p^\mu} = 1,\ x^{q^\nu} = 1,\ \ldots\ x^{r^\varkappa} = 1$$

пусть имѣетъ нѣкоторый корень β, второе корень γ, и т.д., послѣднее — корень ε. Изъ произведеніе

$$\alpha = \beta\gamma\ldots\varepsilon$$

имѣетъ m значеній, потомучто $\beta, \gamma, \ldots \delta$ имѣютъ соотвѣтственно $p^\mu, q^\nu, \ldots r^\varkappa$ значеній, а если одному изъ этихъ корней дать другое значеніе, оставивши значенія остальныхъ прежними, то величина α измѣнится. Итакъ число значеній α равно произведенію чиселъ значе-

ній корней $\beta, \gamma, \ldots \varepsilon$, т.е. равно $p^{\mu} q^{\nu} \ldots r^{\varepsilon} = m$.

Надо доказать, что эти m значеній α суть какъ разъ m корнями даннаго уравненія $z^m = 1$. Такъ какъ

$$\alpha = \beta . \gamma \ldots \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

то

$$\alpha^m = \beta^m . \gamma^m \ldots \varepsilon^m$$

но m есть кратное всѣхъ вспомогательныхъ степеней $p^{\mu}, q^{\nu}, \ldots r^{\varepsilon}$; корни $\beta, \gamma, \ldots \varepsilon$ въ этихъ степеняхъ обращаются каждый въ единицу, слѣд. (теор. 10) каждый изъ множителей $\beta^m, \gamma^m, \ldots \varepsilon^m$ отдѣльно есть 1, отсюда $\alpha^m = 1$, т.е. α служитъ корнемъ даннаго уравненія.

Остается показать, что всѣ значенія α, получаемыя здѣсь, различны. Пусть двѣ какія-нибудь комбинаціи вспомогательныхъ корней равны между собой

$$\beta . \gamma \ldots \varepsilon = \beta' . \gamma' \ldots \varepsilon'; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

если возвести полученное равенство въ степень $\frac{m}{p^{\mu}}$, то всѣ корни, кромѣ β и β' обратятся въ 1, потому что $\frac{m}{p^{\mu}}$ есть кратное всѣхъ вспомогательныхъ степеней, кромѣ p^{μ}, и останется

$$\beta^{\frac{m}{p^{\mu}}} = \beta'^{\frac{m}{p^{\mu}}}, \text{ или } \beta = \beta'$$

возведя равенство (2) въ степени $\frac{m}{q^{\nu}} \ldots \frac{m}{r^{\varepsilon}}$, можно такимъ же образомъ доказать, что $\gamma = \gamma', \ldots \varepsilon = \varepsilon'$, т.е. двѣ комбинаціи могутъ быть равны единственно при условіи равенства отдѣльно каждаго изъ соотвѣтственныхъ корней. Итакъ всѣ α различны. Каждый служитъ корнемъ. Ихъ m. Итакъ всѣ m корней даннаго уравненія суть различныя значенія α.

Корень α первообразный тогда, когда $\beta, \gamma, \ldots \varepsilon$ отдѣльно суть первообразные корни вспомогательныхъ уравненій. Если бы одинъ изъ вспомогательныхъ не былъ первообразнымъ, когда α первообразный, напр. если β не первообразный, то онъ удовлетворяетъ уравненію низшей степени, чѣмъ $z^{p^{\mu}} = 1$, т.е.

$$\beta^{p^{\mu-1}} = 1$$

но тогда можно равенство (1) возвести въ степень $\frac{m(p^{\mu-1})}{p}$ которая есть кратная всѣхъ вспомогательныхъ степеней $q^{\nu} \ldots r^{\varepsilon}$, такъ что

всѣ множители второй части равенства

$$\alpha^{\frac{mp^{m-1}}{p^m}}\ \beta^{\frac{mp^{m-1}}{p^m}}\ \gamma^{\frac{mp^{m-1}}{p^m}}\ \ldots\ \varepsilon^{\frac{mp^{m-1}}{p^m}}.$$

кромѣ $\beta^{\frac{mp^{m-1}}{p}}$ суть единицы. Если же, какъ предположено, p удовлетворяетъ высшимъ степенямъ, то и $\beta^{\frac{mp^{m-1}}{p^m}}=1$, откуда

$$\alpha^{\frac{mp^{m-1}}{p^m}}=1,$$

т.е. α не первообразный корень — рѣшаетъ уравненіе низшей, чѣмъ m степени. Тоже самое можно предполагать, если положить одинъ изъ корней $\gamma\ldots\varepsilon$ не первообразнымъ. Итакъ, если α первообразный корень уравненія $z^m=1$, то $\beta,\gamma\ldots\varepsilon$ первообразные вспомогательныхъ уравненій. Теперь можно уже опредѣлить и число первообразныхъ корней уравненія $z^m=1$, гдѣ m какое угодно составное число.

Въ самомъ дѣлѣ, число первообразныхъ корней β, какъ выведено во второмъ случаѣ, есть $p^m\left(1-\frac{1}{p}\right)$; равнымъ же такимъ образомъ $q^\nu\left(1-\frac{1}{q}\right)$ и т.д.; корней ε — $\tau^\lambda\left(1-\frac{1}{\tau}\right)$. Отсюда число первообразныхъ корней α, получающихся отъ всевозможныхъ комбинацій $\beta,\gamma,\ldots\varepsilon$, есть

$$p^m q^\nu\ldots\tau^\lambda\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\tau}\right)$$

или

$$m\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\tau}\right)$$

§15. Тригонометрическое рѣшеніе двучленныхъ уравненій.

Единицу можно представить въ видѣ комплексной величины

$$1=\mathrm{Cos}\,2k\pi+i.\,\mathrm{Sin}\,2k\pi,$$

потому Sin цѣлаго числа окружностей равенъ нулю, Cos равенъ единицѣ (и модуль тоже единица) слѣд. уравн. $z^m=1$ имѣетъ корень

$$z^m=\mathrm{Cos}\,2k\pi+i.\,\mathrm{Sin}\,2k\pi;$$

чтобы извлечь корень изъ комплексной величины, надо извлечь корень изъ модуля и раздѣлить аргументъ на показатель корня (§1, слѣд.4), поэтому

$$z=\mathrm{Cos}\,\frac{2k\pi}{m}+i.\,\mathrm{Sin}\,\frac{2k\pi}{m}$$

k можетъ имѣть безконечное число значеній, но различныхъ только m, именно $0,1,2,\ldots(m-2),(m-1)$. Если $k=m$, то оно сократится и аргументъ

будетъ 2π = углов окружность, а Cosinus и Sinus 2π равны Cosinus-у 1 и Sinus-у нуля. Вообще, если $\kappa = m + \kappa'$, то аргументъ $\frac{2\kappa\pi}{m} = \frac{2\pi(m+\kappa')}{m} = 2\pi + \frac{2\kappa'\pi}{m}$, т.е. увеличился на окружность, а прибавленіе къ углу какого угодно числа угловыхъ окружностей не измѣняетъ тригонометрическихъ величинъ угла. Итакъ, различныхъ значеній для κ только m, и всѣ начинаютъ повторяться снова.

Если дано двучленное уравненіе общаго вида $z^m = A$, то z также можно выразить, какъ комплексную величину, потомучто A всегда можно представить въ видѣ

$$A = \varrho(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$$

при томъ $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ не измѣняются отъ прибавленія къ φ углового числа окружностей, такъ что

$$A = \varrho\left[\cos(\varphi + 2\kappa\pi) + i.\sin(\varphi + 2\kappa\pi)\right]$$

отсюда

$$z^m = \varrho\left[\cos(\varphi + 2\kappa\pi) + i.\sin(\varphi + 2\kappa\pi)\right]$$

и

$$z = \sqrt[m]{\varrho}\left[\cos\frac{\varphi + 2\kappa\pi}{m} + i.\sin\frac{\varphi + 2\kappa\pi}{m}\right]$$

Теорема 11. Сумма n-ыхъ степеней корней уравненія $z^m = 1$ равна нулю, если n не дѣлится на m, и равна m, если n есть кратное m.

Пусть α есть одинъ изъ первообразныхъ корней даннаго уравненія, остальные корни получатся отъ послѣдовательнаго возведенія α въ различныя степени, такъ что рядъ

$$1, \alpha, \alpha^2, \ldots\ldots \alpha^{m-1}$$

представитъ всѣ корни. Сумма n-ыхъ ихъ степеней, какъ геометрическая прогрессія, напишется въ видѣ

$$S_1 = 1 + \alpha^n + \alpha^{2n} + \ldots\ldots + \alpha^{(m-1)n} = \frac{\alpha^{mn} - 1}{\alpha^n - 1}$$

Пока $n < m$, знаменатель $\alpha^n - 1$ не нуль, потомучто α есть первообразный корень и степенью числителя m не удовлетворяетъ, т.е. α^k не единица и $\alpha^n - 1$ не нуль; числитель же всегда нуль, какъ бы n ни было, потомучто $\alpha^m = 1$, слѣд. и $\alpha^{mn} = 1$, т.е. $\alpha^{mn} - 1 = 0$. Итакъ, пока n менѣе m, сумма n-ыхъ степеней корней равна нулю. Тоже самое будетъ, если $n > m$, но не дѣлится безъ остатка,

потому что α^n можно разложить на $\alpha^{m+n'}$, или $\alpha^m \cdot \alpha^{n'}$; $\alpha^m = 1$, $\alpha^{n'}$ не единица, след. и их произведение не единица и $\alpha^n - 1$ не нуль. Если же n)m и делится на m, то в правой части получается $\frac{0}{0}$, т.е. сумма может быть какой угодно величиной, но вид левой части равенства показывает, что в таком случае сумма обязательно равна m. В самом деле, каждый корень, будучи взведен в степень, кратную m, обращается в единицу. Корней m. Следовательно и сумма равна m. Таким образом

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-1} = 0$$
$$1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \cdots + \alpha^{2(m-1)} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$1 + \alpha^{m-1} + \alpha^{2(m-1)} + \cdots + \alpha^{(m-1)(m-1)} = 0$$

но $\quad 1 + \alpha^m + \alpha^{2m} + \cdots + \alpha^{m(m-1)} = m$ и т.д.

§16. Решение уравнений 3-ей и 4-ой степени.

Решение уравнений степеней выше первой сводится к тому, чтобы отыскать такое уравнение низшей степени, из которого можно было бы понизить все корни рассматриваемого; или же подыскивается способ разбить данное уравнение на два, или больше, степеней низших. Вспомогательное уравнение низшей степени носит название резольвенты, или разрешающего.

Примером такого способа решения уравнений может служить квадратное уравнение, известное из элементарной алгебры

$$z^2 + pz + q = 0$$

Решение его состоит в том, что подыскивается такая функция его корней z_1, z_2

$$y^2 = (z_1 - z_2)^2 = 0,$$

которая разбивается на два уравнения первой степени

$$(y + z_1 - z_2)(y - z_1 - z_2) = 0$$

или $\quad y_1 = z_1 - z_2 \quad$ и $\quad y_2 = z_2 - z_1$

Оно и будетъ въ данномъ случаѣ результантой. Въ раскрытомъ видѣ

$$y^2-(z_1^2+z_2^2-2z_1z_2)=0$$

По Ньютону $z_1^2+z_2^2=p^2-2q$; $z_1z_2=q$, откуда

$$y^2=p^2-4q$$

$$y=\pm\sqrt{p^2-4q}=z_1-z_2$$

Съ другой стороны по Ньютону $z_1+z_2=-p$; извѣстна сумма и разность корней z_1, z_2, откуда опредѣляются самые корни.

$$z_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} \qquad z_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

Способъ Hudde рѣшенія уравненій 3-ей степени.

Способъ этотъ даетъ возможность рѣшенія уравненія 3-ей степени

$$z^3+az^2+bz+c=0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

свести къ рѣшенію биквадратнаго уравненія. Для этого прежде всего надо уничтожить членъ съ квадратомъ перемѣннаго, что достигается легко замѣной z чрезъ $x-\frac{a}{3}$. Вообще, чтобы уничтожить второй членъ уравненія, надо замѣнить перемѣнное чрезъ перемѣнное безъ коэффиціента при второмъ членѣ, дѣленнаго на степень уравненія. Замѣна даетъ

$$\left(x-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(x-\frac{a}{3}\right)+c=0$$

или $$x^3-ax^2+\frac{a^2}{3}x-\frac{a^3}{27}+ax^2-\frac{2a^2x}{3}+\frac{a^3}{9}+bx-\frac{ab}{3}+c=0$$

или $$x^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)x+\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)=0$$

такимъ образомъ кубическое уравненіе сведено къ трехчленному вида

$$x^3+px+q=0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Хотя оно не полное, но тождественно съ полнымъ; рѣшивъ его, стоитъ только подставить вмѣсто полученныхъ корней x величину $z+\frac{a}{3}$ и получатся корни полнаго.

Чтобы свести послѣднее уравненіе къ биквадратному, надо замѣнить x чрезъ $u+v$, гдѣ v есть нѣкоторая произвольная функція u, тогда:

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$$

или $$u^3+v^3+3u^2v+3uv^2+p(u+v)+q=0$$

или $$u^3+v^3+q+3uv(u+v)+p(u+v)=0$$

или $$u^3+v^3+q+(3uv+p)(u+v)=0$$

v осталось произвольным; его надо выбрать так, чтобы остались только старшие члены, т.е. чтобы

$$3uv+p=0, \text{ или } v=-\frac{p}{3u} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

тогда подстановка даст

$$u^3-\frac{p^3}{27u^3}+q=0$$

или $$u^6+u^3q-\frac{p^3}{27}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Получилось биквадратное уравнение, решение которого даст величину u^3; корни кубичные из этого решения равны u; так что

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Раз получена величина u, то не трудно уже узнать отношение v и x. Именно $v=-\frac{p}{3u}$, или

$$v=-\frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}$$

$$v=-\frac{p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3\sqrt[3]{\left(-\frac{q^2}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)\left(-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}}=-\frac{p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{\frac{p^3}{27}}\cdot\frac{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}{-\frac{p^3}{27}}$$

$$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Таким образом u, v различаются друг от друга только знаком при квадратном корне; величина x уравнения (2) равна их сумме.

$$x=u+v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \quad \ldots\ldots \quad (II)$$

Формула эта называется формулой Кардана.

Кубичный корень имеет три значения, а квадратный два, таким образом u и v в отдельности каждое имеет 6 значений, а вел. x повидимому имеет 36 значений: с каждым значением u можно сочетать все 6 значений v, а так как u имеет 6 зна-

ченій, то получается для x 36 суммъ $u+v$. Но это только повидимому; если всмотрѣться въ свойства квадратныхъ и кубичныхъ корней формулы (II), то окажется, что x имѣетъ только 3 различныхъ значенія, остальныя же совпадаютъ съ этими тремя.

Въ самомъ дѣлѣ u и v имѣютъ противоположные знаки при квадратномъ корнѣ, u съ $(+)$ при немъ соотвѣтствуетъ v съ $(-)$; сочетанія же $(+),(+)$ и $(-),(-)$ недопустимы, а $(-),(+)$ тождественно съ $(+),(-)$. Итакъ квадратный корень не вноситъ лишнихъ сочетаній; что касается до кубичнаго, то надо узнать только одно ариѳметическое значеніе, остальныя дастъ умноженія этого корня на величины корня кубичнаго изъ единицы (§14); если $\sqrt[3]{1}$ дастъ величины

$$1, \quad \alpha, \quad \alpha^2$$

то значенія u и v будутъ

$$\begin{array}{cc} u & v \\ \alpha u & \alpha v \\ \alpha^2 u & \alpha^2 v \end{array}$$

гдѣ $\alpha = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; $\alpha^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ (§14 примѣръ)

Опять повидимому x имѣетъ 9 значеній; каждое $u, \alpha u, \alpha^2 u$ можно сочетать со всѣми тремя $v, \alpha v, \alpha^2 v$, но надо принять во вниманіе формулу (I), которая говоритъ, что произведеніе $u.v = -\frac{p}{3}$ есть величина дѣйствительная, а не мнимая. Этимъ опредѣляется свойство пары $u+v$; α и α^2 мнимы, и дѣйствительно только ихъ произведеніе $\alpha^3=1$. Слѣд. нельзя сочетать такія значенія u и v, въ которыя бы входили α и 1, α и α, α^2 и α^2; остаются три сочетанія 1 и 1, α и α^2, α^2 и α, такъ что x можетъ быть только трехъ видовъ

$$x_1 = u+v, \quad x_2 = \alpha u + \alpha^2 v, \quad x_3 = \alpha^2 u + \alpha v.$$

Чтобы получить корни начальнаго уравненія (1), стоитъ только изъ корней x вычесть $\frac{a}{3}$, такъ какъ $z = x - \frac{a}{3}$, поэтому

$$z_1 = u+v-\frac{a}{3}, \quad z_2 = \alpha u + \alpha^2 v - \frac{a}{3}, \quad z_3 = \alpha^2 u + \alpha v - \frac{a}{3}$$

Изслѣдованіе формулы Кордана. Величина подъ квадратнымъ корнемъ

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

можетъ быть больше нуля, равна ему и меньше его. Этимъ опредѣляется, дѣйствительны, равны, или мнимы значенія x

I. Въ первомъ случаѣ, т.е. когда $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$,

x имѣетъ дѣйствительное ариѳметическое значеніе и два мнимыхъ

$$x_1 = u+v;$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}u + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}v; \quad x_3 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}u + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}v$$

или

$$x_2 = -\frac{1}{2}(u+v) + \frac{\sqrt{-3}}{2}(u-v); \quad x_3 = -\frac{1}{2}(u+v) - \frac{\sqrt{-3}}{2}(u-v),$$

т.е. x_2 и x_3 двѣ мнимыя сопряженныя величины.

II Второй случай, когда $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$,

даетъ всѣ три x дѣйствительными и изъ нихъ два равныхъ. Если квадратный корень нуль, то $u=v$, такъ что

$$x_1 = 2u;$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}2u = u, \quad x_3 = -\frac{1}{2}2u = u$$

$$x_1 = 2u, \quad x_2 = u, \quad x_3 = u$$

III Третій случай, когда $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$,

даетъ всѣ три значенія x дѣйствительныя, но не опредѣлимыя помощью формулы Кордана. Повидимому должны бы получиться всѣ x мнимые, такъ какъ квадратный корень есть мнимая величина, но u и v комплексныя сопряженныя величины, потому что разнятся другъ отъ друга только знакомъ при мнимой части. Пусть $u = A+Bi$, $v = A-Bi$, тогда

$$x_1 = u+v = 2A$$

x_2 и x_3 получатся отъ сложенія произведеній u, v на α, α^2.

$$\alpha = \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}; \quad \alpha^2 = \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}$$

$$x_2 = u\alpha + v\alpha^2; \quad x_3 = u\alpha^2 + v\alpha$$

Два произведенія четырехъ попарно сопряженныхъ величинъ суть тоже сопряженныя величины, такъ что $u\alpha$ и $v\alpha^2$ — сопряженны. Въ самомъ дѣлѣ

$$x_2 = -\frac{A}{2} - \frac{B\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{A\sqrt{3}}{2}-\frac{B}{2}\right) - \frac{A}{2} - \frac{B\sqrt{3}}{2} - i\left(\frac{A\sqrt{3}}{2}-\frac{B}{2}\right)$$

или

$$x_2 = -A - B\sqrt{3}$$

таким же $x_3 = -\frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2} - i\left(\frac{A\sqrt{3}}{2} + \frac{B}{2}\right) - \frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{A\sqrt{3}}{2} + \frac{B}{2}\right)$

$$x_3 = -A + B\sqrt{3}$$

Таким образом все x действительные величины, но они не узнаны, потому что зависят от неизвестных A и B, которые сами зависят от кубичных уравнений

$$\begin{cases} A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \\ (Bi)^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \end{cases}$$

поэтому для третьего случая формула Кардана непригодна.

Все три корня x равны между собой, когда $u = 0$ и $v = 0$. В самом деле условие равенства $x_2 = x_3$ есть $u = v$ (2-ой случай), тогда

$$x_1 = 2u \qquad x_2 = x_3 = -u$$

равенство $x_1 = x_2 = x_3$, или $2u = -u$ может быть единственно, когда $u = 0$.

Третий случай удобно решается помощью тригонометрических функций.

Комплексную величину, стоящую под кубичным корнем, можно выразить через модуль и аргумент, так что

$$-\frac{q}{2} = \varrho \cdot \cos\varphi; \qquad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\varrho^2 \sin^2\varphi$$

откуда, возводя в квадрат и вычитая,

$$\varrho^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = -\frac{p^3}{27}$$

Итак $x = \sqrt[3]{\varrho \cdot \cos\varphi + i\varrho \cdot \sin\varphi} + \sqrt[3]{\varrho \cdot \cos\varphi - i\varrho \sin\varphi}$

Корень из комплексной величины получится по теор. 2, стат. 4.

$$x = \sqrt[3]{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} - i \cdot \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right)$$

произвольная величина k имеет только три значения

$$(0, 1, 2)$$

потому что при $k = 3$, тройка сократится и аргумент возвратится к первому случаю $k = 0$; прибавка целых окружностей не влияет на $\cos$ и $\sin$. Таким образом при различных k и по сокращении

$$\begin{cases} x_1 = 2\sqrt[3]{\varrho} \cdot \cos\frac{\varphi}{3} \\ x_2 = 2\sqrt[3]{\varrho} \cos\frac{\varphi + 2\pi}{3} \\ x_3 = 2\sqrt[3]{\varrho} \cos\frac{\varphi + 4\pi}{3} = 2\sqrt[3]{\varrho} \cos\frac{\varphi + \pi}{3} \end{cases}$$

Способъ Лагранжа приложенія симметрическихъ функцій къ рѣшенію кубическихъ уравненій.

Пусть x_1, x_2, x_3 будутъ корни даннаго кубическаго уравненія

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0.$$

Цѣлая несимметрическая трехчленная функція y этихъ корней имѣетъ вообще 6 значеній

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 + Ax_2 + Bx_3 \\
y_2 &= x_1 + Ax_3 + Bx_2 \\
y_3 &= x_2 + Ax_3 + Bx_1 \\
y_4 &= x_2 + Ax_1 + Bx_3 \\
y_5 &= x_3 + Ax_1 + Bx_2 \\
y_6 &= x_3 + Ax_2 + Bx_1
\end{aligned}$$

но Лагранжъ нашелъ такую функцію корней, которая имѣетъ только два различныхъ значенія, именно $y = (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)^3$, гдѣ α и α^2 мнимые корни уравненія $\sqrt[3]{1} = 1$. Но помня, что $\alpha^3 = 1$

$$\begin{aligned}
y_1 &= (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)^3 \\
y_2 &= (x_1 + \alpha x_3 + \alpha^2 x_2)^3 \\
y_3 &= (x_2 + \alpha x_3 + \alpha^2 x_1)^3 = y_1\alpha^6 = y_1 \\
y_4 &= (x_2 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_3)^3 = y_2\alpha^3 = y_2 \\
y_5 &= (x_3 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2)^3 = y_1\alpha^3 = y_1 \\
y_6 &= (x_3 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_1)^3 = y_2\alpha^6 = y_2
\end{aligned}$$

Итакъ $y_1 = y_3 = y_5$; $y_2 = y_4 = y_6$, т.е. y имѣетъ только два различныхъ значенія y_1, y_2, и поэтому равенствъ отъ квадратнаго уравненія

$$y^2 + Ay + B = (y - y_1)(y - y_2) = 0,$$

коэффиціенты котораго

$$-A = y_1 + y_2 \quad \text{и} \quad B = y_1 \cdot y_2$$

суть симметрическія функціи корней y_1, y_2, а потому (§8, Стр.38) симметрическія функціи и величинъ x_1, x_2, x_3, отъ которыхъ y составленъ несимметрическая функція.

$$A = -(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)^3 - (x_1 + \alpha x_3 + \alpha^2 x_2)^3$$
$$B = (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)^3 (x_1 + \alpha x_3 + \alpha^2 x_2)^3$$

это – симметрические функции, которые выражаются непосредственно: при перестановке x_2 и x_3 меняется только множитель y_1, y_2, а остальные все при перестановке дают значения y, равные или y_1, или y_2. По одному из вышеприведенных способов можно вычислить A и B – симметрические функции от x_1 и тогда уравнение будет иметь коэффициенты P, Q, R.

Кубическое уравнение

$$y^2 + Ay + B = 0$$

имеет корни y_1 и y_2. Решив его, будем иметь y_1 и y_2 через коэффициенты P, Q, R, а по y_1 и y_2 можно определить корни x_1, x_2, x_3, т.е. для этого кубического уравнения.

В самом деле

$$x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 = \sqrt[3]{y_1} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3 = \sqrt[3]{y_2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

кроме того

$$x_1 + x_2 + x_3 = -P \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$1, \alpha, \alpha^2$ – корни уравнения $z^3 - 1 = 0$, коэффициент при z^2 которого равен нулю, т.е. $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$. Сумма (1), (2) и (3) дает поэтому величину x_1

$$3x_1 = -P + \sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2}$$

x_2 получится, если прежде, чем складывать, умножить (1) на α^2, (2) на α, (3) на 1; именно тогда

$$3x_2 = -P + \alpha^2 \sqrt[3]{y_1} + \alpha \sqrt[3]{y_2}$$

если же (1) помножить на α, (2) на α^2, тройку на 1, то

$$3x_3 = -P + \alpha \sqrt[3]{y_1} + \alpha^2 \sqrt[3]{y_2}$$

Величины y_1 y_2, как сказано, выражаются через P, Q, R.

§17 Решение уравнений четвертой степени.

1) Способ Феррари.

Каждое уравнение четвертой степени общего вида

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

Высшая Алгебра Листок № 5

Проф. Дмитр. Синц. Проф. Дмитр. Синц.

которое, перенеся члены, можно представить в виде

$$x^4 + px^3 = -qx^2 - rx - s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

сделать полными квадратами в обеих частях. Тогда, если перенести все в левую часть, получится разность квадратов, разбивающаяся на сумму и разность.

До полного квадрата в левой части (1) не хватает члена $\left(\frac{px}{2}\right)^2$; прибавим его к обеим частям равенства.

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}x\right)^2 = \left(\frac{p^2}{4} - q\right)x^2 - rx - s$$

Дальше можно, оставляя первую часть точным квадратом, обратить в квадрат и вторую.

Именно для это надо первую часть из квадрата двучлена превратить в квадрат трехчлена, при чем третий член оставить произвольным (пусть третий член будет y) и затем подобрать y таким, чтобы вторая часть сделалась точным квадратом. До квадрата трехчлена в первой части не хватает удвоенных произведений первого и второго членов на третий и квадрата третьего, след. надо прибавить к обеим частям $2x^2y + pxy + y^2$; тогда уравнение примет вид

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}x + y\right)^2 = \left(\frac{p^2}{4} - q + 2y\right)x^2 + \left(py - r\right)x + y^2 - s$$

Вторая часть обратится в точный квадрат, если коэффициент при x сделается равным удвоенному произведению всех членов $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q + 2y}$ и $\sqrt{y^2 - s}$, иначе говоря, если

$$(py - r)^2 = 4\left(\frac{p^2}{4} - q + 2y\right)(y^2 - s)$$

Получилось кубическое уравнение относительно y

$$8y^3 + (p^2 - 4q - p^2)y^2 + (2pr - 2s)y + 4qs - p^2s - r^2 = 0$$

или

$$8y^3 - 4qy^2 + 2(pr - s)y + 4qs - p^2s - r^2 = 0,$$

из которого y определяется одним из указанных уже способов. Это и есть резольвента. Пусть y найден, тогда уравнение четвертой степени

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}x + y\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q + 2y}\cdot x + \frac{1}{2}\,\frac{py - r}{\sqrt{\frac{p^2}{4} - q + 2y}}\right)^2$$

по перенесении всего в левую часть распадается на сумму и разность, представляющие отдельно квадратные уравнения по x.

$$x^2+\frac{p}{2}x+y+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q+2y}\cdot x+\frac{1}{2}\,\frac{py-r}{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q+2y}}=0$$

и

$$x^2+\frac{p}{2}x+y-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q+2y}\cdot x-\frac{1}{2}\,\frac{py-r}{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q+2y}}=0$$

которая дает возможность определить корни x.

Корни $y_1\,y_2\,y_3$ разрешенные не трудно выразить через корни $x_1\,x_2\,x_3\,x_4$ данного уравнения. Если $x_1\,x_2$ корни первого из двух квадратных уравнений, $x_3\,x_4$ корни второго, то

$$x_1x_2=y+\frac{1}{2}\,\frac{py-r}{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q+2y}}$$

$$x_3x_4=y-\frac{1}{2}\,\frac{py-r}{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q+2y}}$$

поскольку произведение корней равно известному числу, откуда

$$2y=x_1x_2+x_3x_4$$

Неизвестному y имеет шесть значений, потому число сочетаний из четырех элементов по два $\frac{3\cdot4}{1\cdot2}$, но в существе различных значений только три, попарно по два равных, напр.

$$x_1x_2+x_3x_4=x_3x_4+x_1x_2$$

2) Способ Лагранжа.

Лагранж воспользовался зависимостью между корнями решенного и корнями уравнения четвертой степени

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

для его решения. Корень y имеет три значения

$$y_1=x_1x_2+x_3x_4$$
$$y_2=x_1x_3+x_2x_4$$
$$y_3=x_1x_4+x_2x_3$$

и след. зависит от уравнения третьей степени

$$y^3+Ay^2+By+C=0$$

которое можно решить или по способу Кардо, или по способу Лагранжа, и таким образом узнать $y_1\,y_2\,y_3$ через A,B,C. Но A,B

представляютъ симметрическія функціи корней x даннаго уравненія

$$A = y_1 + y_2 + y_3$$
$$B = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3$$
$$C = y_1y_2y_3$$

и поэтому могутъ быть вычислены черезъ коэффиціенты p, q, r, s. Соотношеніе

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4$$

даетъ сумму величинъ x_1x_2 и x_3x_4; съ другой стороны

$$x_1x_2x_3x_4 = s$$

представляетъ ихъ произведеніе. По суммѣ и произведенію можно опредѣлить самыя величины x_1x_2 и x_3x_4; именно они служатъ корнями z_1 z_2 квадратнаго уравненія

$$z^2 - y_1z + s = 0$$

т.е. $z_1 = x_1x_2$, $z_2 = x_3x_4$.

По теоремѣ 4, Слѣд. I $(x_1+x_2)x_3x_4 + (x_3+x_4)x_1x_2 = -r$, или

$$\begin{cases} (x_1+x_2)z_2 + (x_3+x_4)z_1 = -r \\ (x_1+x_2) + (x_3+x_4) = p \end{cases}$$

и

Отсюда опредѣлятся величины суммъ x_1+x_2 и x_3+x_4, а такъ какъ кромѣ того извѣстно и произведенія тѣхъ же корней $x_1x_2 = z_1$ и $x_3x_4 = z_2$, то отсюда можно узнать и самые корни x_1, x_2, x_3, x_4, т.е. рѣшить уравненіе четвертой степени.

Уравненія выше четвертой степени не могутъ быть рѣшены въ радикалахъ, иначе говоря нельзя дать общей формулы ихъ рѣшенія, какъ это сдѣлано для уравненій отъ первой до четвертой степени. Это доказалъ Abel. Доказательство существенной важности, такъ теперь усилія математиковъ направятся на другія способы рѣшенія, преимущественно на связь корней съ коэффиціентами. Дальнѣйшая часть курса упадаетъ именно эти такъ сказать побочные способы рѣшенія.

Б. С. П.

§18. Числовыя рѣшенія уравненій.

Всякое уравненіе съ дѣйствительными раціональными коэффиціентами

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + a_m = 0$$

можно освободить отъ дробей, ставя коэффиціентъ при старшей степени перемѣннаго равнымъ единицѣ. Для этого надо сначала привести лѣвую часть къ одному знаменателю; пусть она приметъ въ такомъ случаѣ видъ

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0$$

затѣмъ положимъ все уравненіе на A_0^{m-1} благодаря чему при каждой степени x явится и коэффиціентъ A_0 въ той же степени

$$(A_0 x)^m + A_1 (A_0 x)^{m-1} + A_2 A_0 (A_0 x)^{m-2} + A_3 A_0^2 (A_0 x)^{m-3} + \ldots\ldots + A_m A_0^{m-1} = 0$$

и наконецъ замѣнимъ $A_0 x$ новымъ перемѣннымъ y, такъ что

$$y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + p_3 y^{m-3} + \ldots\ldots + p_m = 0$$

Теорема 12. Уравненіе съ цѣлыми коэффиціентами не можетъ имѣть дробныхъ корней.

Если положимъ, что корень дробный $x = \frac{a}{b}$, гдѣ $\frac{a}{b}$ несократимая дробь, то

$$\frac{a^m}{b^m} + p_1 \frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} + p_2 \frac{a^{m-2}}{b^{m-2}} + \ldots\ldots + p_m = 0$$

или, если всѣ части помножимъ на b^{m-1} и перенесемъ все въ правую часть, кромѣ перваго члена, то

$$\frac{a^m}{b} = -p_1 a^{m-1} - p_2 a^{m-2} b - \ldots\ldots - p_m b^{m-1}$$

Такъ какъ a и b, равно какъ и коэффиціенты, числа цѣлыя, то въ правой части цѣлое число, слѣд. a^m должно дѣлиться на b, но это быть не можетъ, потому что $\frac{a}{b}$ несократимая дробь, т.е. a и b не имѣютъ общихъ множителей.

Чтобы отрѣшить, спросимъ ли данное число корнемъ уравненія, существуютъ такіе способы.

I

Первый способъ. Пусть a есть одинъ изъ корней уравненія

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + p_m = 0$$

Если вместо a вместо x и разделить на a левую часть

$$a^{m-1} + p_1 a^{m-2} + p_2 a^{m-3} + \dots + p_{m-1} + \frac{p_m}{a} = 0,$$

то p_m делится на a, потому что остальные члены числа целые.

Поэтому

$$p_m = a q_{m-1}$$

для q_{m-1} целое. Итак, чтобы найти корни данного уравнения, надо предварительно выписать все множители, из которых составить свободный член. Далее надо еще раз разделить на a полученное уравнение

$$a^{m-2} + p_1 a^{m-3} + p_2 a^{m-4} + \dots + \frac{p_{m-1} + q_{m-1}}{a} = 0$$

по-прежнему $\frac{p_{m-1} + q_{m-1}}{a}$ целое, так что

$$p_{m-1} + q_{m-1} = a q_{m-2}$$

таким же образом найдутся другие соотношения, и получится

$$\begin{aligned} p_m &= a q_{m-1} \\ p_{m-1} + q_{m-1} &= a q_{m-2} \\ p_{m-2} + q_{m-2} &= a q_{m-3} \\ \dots\dots &\dots\dots \\ p_1 + q_1 &= a q_0 \\ q_0 &= -1 \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо, потому что $a^2 + p_1 a + p_2 + q_2 = 0$; или $a + p_1 = -\frac{p_2 + q_2}{a}$; $p_2 + q_2 = a q_1$; далее $a + p_1 + q_1 = 0$, или $-1 = \frac{p_1 + q_1}{a} = q_0$.

Если данная величина тогда будет корнем, когда на нее делится свободный член; на нее должно делиться частное от первого деления, сложенное с предпоследним коэффициентом и т. д. Если остаток последнего деления получится нуль, то число — корень.

Пример. Дано $x^4 - x^3 - 6x - 36 = 0$

Свободный член -36 содержит следующие множители

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36.$$

Что 1 не служит корнем, видно из непосредственной подстановки вместо x. Не разрывать получается не 0, а -12; точно также, если подставить (-1), то получится -28; $+2$ тоже не корень; в самом деле $\frac{-36}{2} = -18$; $-18 - 6 = -24$; $\frac{-24}{2} = -12$; $-12 + 0 = -12$; $\frac{-12}{2} = -6$; $-6 - 1 = -7$; $-\frac{7}{2}$ несократимая дробь. Первым корнем будет (-2),

потому что $\frac{-36}{-2} = 18$; $18-6=12$; $\frac{12}{-2} = -6$; $-6+0=-6$; $\frac{-6}{-2} = 3$; $3-1=2$; $\frac{2}{-2} = -1$; $-1+1=0$. Дѣйствіе отыскиваніе корня располагаютъ обыкновенно такъ:

коэфф-ы	3
-36	
-6	-18
0	-6
-1	-3
1	0

выписываютъ коэффиціенты. Дѣлятъ первый на испытуемое число; сумму частнаго съ слѣдующимъ коэффиціентомъ выписываютъ, дѣлятъ снова и т.д. Такимъ образомъ выяснится, что -3 не корень и найдутся остальные.

Чтобы узнать, не служитъ ли данный корень a второй разъ корнемъ, дѣлятъ уравненіе на $z-a$ и съ новымъ уравненіемъ продѣлываютъ тоже самое.

NB II <u>Второй способъ.</u> Можно и еще проще опредѣлить заранѣе, что нѣкоторые дѣлители свободнаго члена не годятся, какъ корни. Пусть a есть корень уравненія

$$f(x)=0$$

Если вычесть изъ функціи $f(a)=0$ тоже функцію другой произвольной величины b и разность раздѣлить на разность $a-b$, то получится цѣлое число, такъ какъ въ разности $f(a)-f(b)$ свободные члены сократятся, а остальные примутъ форму

$$a^m - b^m + p_1(a^{m-1} - b^{m-1}) + \ldots\ldots + p_{n-1}(a-b)$$

изъ которой можно вынести за скобку разность $(a-b)$, потому что разность одинаковыхъ степеней двухъ величинъ дѣлится на разность величинъ безъ остатка. Слѣд., если $b=\pm 1$, то

$$\frac{f(a)-f(\pm 1)}{a\mp 1}$$

есть цѣлое число. Но $f(a)=0$; поэтому, если a — корень, то функція положительной единицы дѣлится на корень безъ единицы, а функція отрицательной единицы на корень плюсъ единица. $\frac{f(\pm 1)}{a\mp 1}$ = цѣлое.

Два условія [illegible] существов.

Целый многочленной функции есть просто число, какъ сумма коэффициентовъ, а чтобы получить функцію отрицательной единицы, надо перемѣнить знакъ у коэффиціентовъ, имѣющихъ при неизвѣстномъ степень нечетныхъ показателей.

Примѣръ. Для ур. $x^4 - x^3 - 6x - 36 = 0$ функція $f(+1) = -42$, $f(-1) = -28$; 42 должно дѣлиться на $a-1$, 28 на $a+1$. Этимъ сейчасъ же отвѣчаются и числа Фигуровъ. Ихъ самыхъ дѣлитъ

42 должно дѣлиться на	35	37	17	19	11	13	8	10	5	7	3	5	2	4	1	3	0	2
28 " " — " — " —	37	35	19	17	13	11	10	8	7	5	5	3	4	2	3	1	2	0
Числа изъ коихъ слагало	+36	-36	+18	-18	+12	-12	+9	-9	+6	-6	+4	-4	+3	-3	+2	-2	+1	1

Отсюда видно, что не годятся $+36, -36, +18, -18, +9, -9, +6$ (послѣднее видно, потому, хотя 28 дѣлится на 7, но 42 не дѣлится на 5), $-6, +4$ (по той же причинѣ, какъ и $+6$), $-4, -3, +2$. Остаются $+3, -2, +1, -1$. Постановка ихъ дѣлается, какъ было показано раньше.

Итакъ корнями могутъ быть только $+3, -2$. Уравненіе четвертой степени, когда найдены остальные корни, нужно разложить лѣвую часть на биномы $(x-x_1)$ и $(x-x_2)$, если x_1 и x_2 корни. Многочленъ $x^4 - x^3 - 6x - 36$, дѣленный на $x+2$, даетъ

$$x^3 + 5x^2 + 10x - 18 = 0$$

а если послѣдній разложить на $x-3$, то получится

$$x^2 + 6 = 0, \quad \text{или} \quad x = \pm\sqrt{-6}$$

Итакъ остальные два корня мнимые. Такимъ образомъ

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = +\sqrt{-6}, \quad x_4 = -\sqrt{-6}.$$

Собственно говоря, изложеннымъ двумя способами можно найти всѣ цѣлые дѣлители, но они дѣлаются очень кропотливыми, когда коэффиціенты велики и степень высока. Дальнѣйшее изложеніе имѣетъ въ виду по возможности упростить изысканіе корней.

Вычисленіе цѣлыхъ числовыхъ корней уравненія распадается на четыре дѣйствія: 1) Составленіе корней, наиболѣе удобно указать ихъ числа, въ которыхъ входятъ заключаются всѣ цѣлые входящіе и какъ они должны въ дѣлительности. 2) Вычисленіе корней; по удобно

сблизить предѣлы, найденные для каждаго корня, на столько, чтобы они выкинули, такъ сказать, корень.

§ 19. Высшій и низшій предѣлы корней уравненія.

Если всѣ коэффиціенты уравненія

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m = 0$$

положительны, то положительныхъ корней нѣтъ; въ противномъ случаѣ существенно положительный и конечный многочленъ оказался бы равнымъ нулю. Пусть a_n есть первый отрицательный коэффиціентъ, пусть дальнѣйшіе всѣ коэффиціенты отрицательны и A есть высшій изъ нихъ.

Отрицательная часть исчезнетъ, если прибавить величину

$$A(x^{m-n} + x^{m-n-1} + \dots + 1)$$

и вычесть ее же; это сумма геометрической прогрессіи, равная

$$A\,\frac{x^{m-n+1}-1}{x-1}$$

Уравненіе приметъ видъ

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_nx^{m-n} + \dots + Ax^n + \dots + A(x^{m-n} + x^{m-n-1} + \dots + 1) - \frac{A(x^{m-n+1}-1)}{x-1} = 0$$

при чемъ отрицательнаго осталось только $-\frac{A(x^{m-n+1}-1)}{x-1}$; но и эта дробь исчезнетъ, если x подобрать такимъ, чтобы первый членъ былъ больше ея

$$a_0x^m > A\,\frac{x^{m-n+1}-1}{x-1}$$

или $a_0x^m(x-1) > A(x^{m-n+1}-1)$, или $a_0x^{n-1}(x-1) > A$

Послѣднее неравенство можно замѣнить болѣе сильнымъ

$$a_0(x-1)^n > A$$

Итакъ, если $x > 1 + \sqrt[n]{\frac{A}{a_0}}$, то весь многочленъ положителенъ, а не нуль и поэтому всѣ корни меньше $1 + \sqrt[n]{\frac{A}{a_0}}$, слѣд. это есть высшій предѣлъ положительныхъ корней.

Нетрудно теперь найти и низшій предѣлъ положительныхъ корней; для этого стоитъ только замѣнить x черезъ $\frac{1}{y}$. Нѣкото-

рое B будетъ верхнимъ предѣломъ y, тогда $\frac{1}{B}$ служитъ нижнимъ предѣломъ x, помощью, если величины y, годныя какъ корни, имѣютъ B, $y < B$, то $\frac{1}{y} < \frac{1}{B}$, т.е. $\frac{1}{B}$ служитъ нижнимъ предѣломъ x. Чтобы найти предѣлы отрицательныхъ корней, надо замѣнить x чрезъ $-y$ и найти предѣлы положительныхъ y. Тѣ же величины будутъ служить предѣлами отрицательныхъ x.

Итакъ найдены четыре предѣла: два для отрицательныхъ и два для положительныхъ корней; но приложенный способъ даетъ предѣлы слишкомъ близкіе къ истиннымъ. Другіе способы даютъ болѣе удаленные предѣлы.

Пусть въ уравненіи $f(x)=0$, расположенномъ по нисходящимъ степенямъ x, сначала идутъ всѣ положительные члены, при чемъ послѣдній изъ нихъ степени n, а потомъ отрицательные; тогда

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x) = 0,$$

гдѣ $\varphi(x)$ есть сумма всѣхъ положительныхъ, а $-\psi(x)$ сумма всѣхъ отрицательныхъ членовъ; $\psi(x)$ самъ по себѣ теперь положителенъ. Дѣля на старшую положительную степень x^n, можно написать

$$\frac{\varphi(x)}{x^n} - \frac{\psi(x)}{x^n} = 0$$

въ этомъ соотношеніи $\frac{\varphi(x)}{x^n}$ есть цѣлый многочленъ, увеличивающійся съ увеличеніемъ x; $\frac{\psi(x)}{x^n}$ есть многочленъ дробный, уменьшающійся съ увеличеніемъ x. Спод. легко подобрать такое достаточно большое x, при которомъ

$$\frac{\varphi(x)}{x^n} > \frac{\psi(x)}{x^n}$$

Найденная величина x будетъ верхнимъ предѣломъ, потому что если еще болѣе увеличивать x, то отрицательная часть будетъ все уменьшаться и многочленъ $f(x)$ будетъ положительнымъ.

Этотъ способъ легко обобщить, если положительные и отрицательные члены не разбивать, какъ это дѣлалось сейчасъ, на двѣ группы.

Дано какое-нибудь уравненіе

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} - a_2x^{m-2} + a_3x^{m-3} - a_4x^{m-4} - \dots = 0$$

Пусть $\varphi(x)$ означаетъ сумму старшихъ положительныхъ членовъ до перваго отрицательнаго, въ данномъ случаѣ $\varphi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1}$; сумма всѣхъ отрицательныхъ членовъ пусть будетъ $\psi(x)$, а сумма всѣхъ остальныхъ положительныхъ, кромѣ первыхъ $\vartheta(x)$. Уравненіе обратится въ

$$\varphi(x) - \psi(x) + \vartheta(x) = 0$$

Если найти x, для котораго $\varphi(x) - \psi(x)$ положительно, то всѣ значенія x, большія найденнаго, будутъ удовлетворять неравенству $\varphi(x) - \psi(x) + \vartheta(x) > 0$, слѣдовательно найденная величина будетъ высшимъ предѣломъ. Онъ далекъ отъ истиннаго, но всетаки это способъ можно примѣнить такъ, что получатся болѣе тѣсные предѣлы.

Пусть чередующіяся группы положительныхъ и отрицательныхъ членовъ будутъ $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$, и т.д. Уравненіе будетъ

$$[\varphi_1(x) - \psi_1(x)] + [\varphi_2(x) - \psi_2(x)] + [\varphi_3(x) - \psi_3(x)] + \ldots = 0$$

Для x надо подобрать такое достаточно большое значеніе, чтобы первая разность сдѣлалась положительной. Это возможно на основаніи предыдущихъ соображеній. Далѣе подобранная величина x должна сдѣлать положительной и вторую разность; если x окажется мало для этого, то его слѣдуетъ увеличить. Такимъ же образомъ и остальныя всѣ разности при достаточно большомъ x сдѣлаются положительными. Найденный x будетъ слѣдовательно верхнимъ предѣломъ.

Замѣчаніе. Изложенное способъ, очевидно, предполагаетъ, чтобы старшій членъ уравненія имѣлъ знакъ (+); поэтому, если этого нѣтъ, то нужно у всего уравненія перемѣнить знакъ.

Способъ Ньютона. Величина x, дѣлающая всѣ производныя данной функціи положительными, служитъ верхнимъ предѣломъ корней. Строка Тейлора $f(x)$ будетъ:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^m}{1.2 \ldots m} f^{(m)}(x);$$

если x обращаетъ всѣ $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$.... въ положительныя, то никакой положительной прибавкой h не можетъ обратить функцію въ нуль, т.е. ни одна величина, большая подобраннаго x, не

спросить корней; x есть высший предел корней.

§ 20. Отделение корней.

Отделить корни, значит указывать пределы, в которых заключается один корень. Этот вопрос тесно связан с вопросом о числе действительных и мнимых корней уравнения.

Теорема 13. Число корней уравнения $f(x)=0$, заключающихся между некоторыми пределами x и x_1, четно, или нечетно в зависимости от того, одинаковы или разны знаки принимаемые многочленом $f(x)$ при подстановке в него данных пределов x и x_1. В частности, если $f(x)$ и $f(x_1)$ имеют разные знаки, то между x и x_1 заключается по крайней мере один корень.

В самом деле многочлен $f(x)$ можно разложить на линейные множители

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ldots\ldots(x-k)(x-l)=0,$$

при чем доказано (стр. 4, отд. II), что если среди множителей находятся p мнимых типа $[x-(p+iq)]$, то найдутся также p сопряженных $[x-(p-iq)]$. Произведение этих $2p$ множителей равно произведению p существенно положительных множителей $(x-p)^2+q^2$, которое есть, всегда в $f(x)$, не может переменить его знака. Пусть $\Phi(x)$ есть произведение всех мнимых линейных множителей, тогда

$$f(x)=\Phi(x).(x-a)(x-b)\ldots\ldots(x-l)$$

Если подставить сюда x и x_1, и результаты разделить, то

$$\frac{f(x)}{f(x_1)}=\frac{\Phi(x)}{\Phi(x_1)}\,\frac{x-a}{x_1-a}\,\frac{x-b}{x_1-b}\ldots\ldots\frac{x-l}{x_1-l}\ldots\ldots(1)$$

Множитель $\frac{\Phi(x)}{\Phi(x_1)}$ положителен. Если какой нибудь из действительных корней, напр. b, заключается между x и x_1, то множитель $\frac{x-b}{x_1-b}$ отрицателен, потому и отношение $\frac{f(x)}{f(x_1)}$ отрицательно, т.е. $f(x)$ и $f(x_1)$ имеют разные знаки.

Итак, если между пределами x и X, заключается корень, то $f(x)$ при переходе через него меняет знак. Пусть $f(X)$ положительно; если в данных пределах заключается один корень, то $f(x)$ отрицательно, если два корня, то положительно, если три, то снова отрицательно и т.д.

Обратно, $f(x)$ только в нечет случаях может переменить знак, переходя от $f(x)$ к $f(X)$, если один из множителей выражения (1) отрицателен, т.е. один из корней содержится в пределах x..X.

Следствие I. Уравнение нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень, знак которого противоположен знаку свободного члена. Предполагается, что старший член положителен.

Пусть свободный член отрицателен; если X есть высший предел положительных корней (высший предел их есть нуль), то $f(x)$ положителен, тогда как $f(0)$ отрицателен, поэтому равен свободному члену. По предыдущему в пределах $(0, X)$ наверно заключается корень.

Если свободный член положителен, то надо подставить $-x$ вместо x. Так как степень уравнения нечетная, то старший член переменит знак. Затем надо переменить знаки у всего уравнения, благодаря чему дело сводится к предыдущему случаю. Но теперь X есть высший предел отрицательных корней и уравнение должно иметь по крайней мере один отрицательный корень.

Следствие II. Уравнение четной степени, свободный член которого отрицателен, имеет по крайней мере один действительный корень положительный, и один действительный отрицательный.

Если X есть высший предел положительных корней, то $f(x)$ и $f(0)$ имеют противоположные знаки, след. между x и 0 заключается корень. Тоже самое можно сказать относительно

функціи $f(-x)=0$; тогда x есть предѣлъ отрицательныхъ корней и слѣд. между x и 0 содержится корень.

Теорема Декарта.

Если въ многочленѣ два сосѣднихъ члена имѣютъ одинаковые знаки, то говорятъ, что они образуютъ послѣдовательность, если же разные, то корни даютъ перемѣну. На перемѣнахъ и послѣдовательностяхъ построена теорема Декарта, но прежде, чѣмъ ее высказать, надо доказать лемму, на которую она опирается.

Лемма. Если цѣлый многочленъ $f(x)$ помножить на двучленъ $x-a$, гдѣ a есть нѣкоторое положительное количество, то число перемѣнъ, содержащихся въ произведеніи $(x-a)f(x)$ превосходитъ число перемѣнъ въ $f(x)$ на нечетное число.

Если расположить $f(x)$ по нисходящимъ степенямъ x, и заключить въ скобки всѣ послѣдовательные члены одного знака, такъ что

$$f(x)=(a_0x^m+\ldots)-(a_1x^{m_1}+\ldots)+(a_2x^{m_2}+\ldots)-\ldots+(-1)^k(a_kx^{m_k}+\ldots),$$

то число перемѣнъ равно числу скобокъ минусъ единица, т.е. $=k$. Отъ умноженія на $(x-a)$ получится рядъ членовъ, умноженныхъ на x

$$x.f(x)=(a_0x^{m+1}+\ldots)-(a_1x^{m_1+1}+\ldots)+(a_2x^{m_2+1}+\ldots)-\ldots+(-1)^k(a_kx^{m_k+1}+\ldots)$$

и рядъ членовъ отъ умноженія $f(x)$ на $-a$

$$-af(x)=-(aa_0x^m+\ldots)+(aa_1x^{m_1}+\ldots)-\ldots+(-1)^{k+1}(aa_kx^{m_k}+\ldots)$$

$(x-a)f(x)$ равно суммѣ этихъ двухъ многочленовъ. Знаки членовъ, стоящихъ въ началѣ скобокъ въ первомъ многочленѣ, а поэтому и знаки передъ скобками, тѣ-же, что и въ многочленѣ $f(x)$. Отъ присоединенія второго многочлена члены $x^{m+1}, x^{m_1+1}, x^{m_2+1}\ldots$ не измѣняютъ своего знака, потому что къ нимъ приложатся изъ второго многочлена послѣдніе члены предшествующихъ скобокъ, помноженныхъ на $(-a)$. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ пренсія

к перемѣнъ сохранилъ свою силу.

Не трудно замѣтить, что теперь явится одна перемѣна, помимо явившейся новаго члена съ знакомъ, обратнымъ предшествующему, происшедшая отъ умноженія $(-a)$ на первоначальный членъ $f(x)$. Итакъ теперь въ произведеніи $(x-a)f(x)$ между скобками слѣдуютъ $k+1$ перемѣнъ.

Не перемѣны могутъ быть и внутри скобокъ. Такъ какъ въ началѣ и въ концѣ скобокъ стоятъ различные знаки, то число перемѣнъ въ каждой скобкѣ четное: отъ $(+)$ къ $(-)$, или обратно, можно перейти только черезъ четное число перемѣнъ, если не считать послѣдней. Слѣд. сумма всѣхъ перемѣнъ въ скобкахъ есть четное число $2p$.

Итакъ отъ умноженія на $(x-a)$ прибавилось всего $2p+1$ перемѣнъ — число нечетное. Теперь можно высказать теорему Декарта.

Теорема II. Если уравненіе имѣетъ ν положительныхъ корней, то число перемѣнъ въ лѣвой части его или ν, или на четное число больше.

Разложивъ данное уравненіе $f(x)=0$ на линейные множители будемъ

$$f(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-l)\,\varphi(x),$$

гдѣ $\varphi(x)$ есть произведеніе множителей, соотвѣтствующихъ мнимымъ и отрицательнымъ корнямъ, а $a, b, \dots l$ суть положительные корни. $\varphi(x)$ содержитъ четное число перемѣнъ, такъ какъ старшій и свободный членъ его имѣютъ одинаковые знаки. Это произойдетъ отъ того, что мнимые корни, входя попарно сопряженными $(x-p+iq)(x-p-iq)$, будутъ давать множители $x^2 - 2px + p^2+q^2 = (x-p^2)+q^2$, а отрицательные корни множители $(x+\alpha)$; и тѣ и другіе множители существенно положительны.

Итакъ, пусть $\varphi(x)$ содержитъ 2κ перемѣнъ. Умноженіе $\varphi(x)$ на $(x-a)$ дастъ $2\kappa_1+1$ перемѣнъ; умноженіе на $(x-b)$ дастъ $2\kappa_2+2$ перемѣнъ и т. д. Со каждымъ новымъ положительнымъ корнемъ

прибавляется четное число перемен, т.е. общее их число попеременно меняется с четного на нечетное и наоборот, и если положительных корней ν, то число перемен было бы в левой части уравнения $2k_r + \nu$.

Следствие. Если уравнение $f(x)$ имеет ν отрицательных корней, то в уравнении $f(-x)=0$, получаемом из данного заменой x через $-x$, число перемен или равно ν, или на четное число больше.

Положительные корни уравнения $f(-x)=0$ служат отрицательными уравнения $f(x)=0$. Относительно первых справедлива предыдущая теорема, след. она справедлива и для вторых.

Теорема 15. Если уравнение имеет все корни действительные, то число положительных корней в точности равно числу перемен в левой части, а число отрицательных корней равно числу перемен в уравнении $f(-x)=0$, получаемом из данного заменой x через $-x$.

Доказательство этой теоремы основано на свойствах разностей показателей соседних членов.

Левая часть уравнения содержит член, разность показателей которых четна. Пусть их будет λ; эти члены обозначим

$$2k_1+1, \quad 2k_2+1, \quad 2k_3+1, \ldots$$

Далее будут члены, имеющие разные знаки и разность показателей которых тоже четная. Пусть это будут

$$2h_0+2, \quad 2h_2+2, \quad 2h_3+2 \ldots\ldots$$

Число их μ. Наконец найдутся члены с одинаковыми знаками, разность показателей которых тоже четная. Пусть это

$$2g, \quad 2g_2, \quad 2g_3 \ldots\ldots$$

Число их ν. Таким образом $\mu+\nu+\lambda$ обращаются в нуль промежутков между членами. Число членов будет на 1 больше

$$\mu+\nu+\lambda+1$$

а число приводимых членов выразится суммой разностей

показателей будет числа промежутковъ

$$2\Sigma\kappa + 2\Sigma h + \mu + 2\Sigma g - \nu = 2s + \mu - \nu,$$

если для краткости обозначить $2\Sigma\kappa + 2\Sigma h + 2\Sigma g$ чрезъ $2s$. Степень уравненія опредѣлится, если къ числа членовъ, входящихъ въ уравненіе и пропущенныхъ вычесть единицу. Такъ какъ членовъ $2s + \mu - \nu + \lambda + \mu + \nu + 1$, то степень $m = 2s + 2\mu + \lambda$.

Напримѣръ въ уравненіи $x^9 + x^7 - x^3 + x^2 - a = 0$, $2\kappa_1 + 1 = 1$, $\lambda = 2h_1 + 2 = 4$, $2h_2 + 2 = 2$, $\mu = 2$; $2g = 2$, $\nu = 1$; число промежутковъ $= \lambda + \mu + \nu = 4$, число входящихъ членовъ $= \lambda + \mu + \nu + 1 = 5$, число пропущенныхъ $= 2\Sigma\kappa + 2\Sigma h + \mu + 2\Sigma g - \nu = 0 + 2 + 2 + 2 - 1 = 5$. Степень $m = 2s + 2\mu + \lambda = 4 + 4 + 1 = 9$.

Пусть V есть число перемѣнъ въ начальномъ уравненіи $f(x)$, а V_1 число перемѣнъ въ уравненіи $f(-x) = 0$. Съ другой стороны число перемѣнъ въ начальномъ уравненіи есть $\lambda + \mu$. Благодаря замѣнѣ x черезъ $-x$ исчезнутъ степени перемѣнятъ знакъ, изъ членовъ перемѣнитъ знакъ одинъ изъ членовъ составляющихъ разность $2\kappa_1 + 1$ и λ перемѣнъ исчезнутъ, обратившись въ послѣдовательности членовъ въ разностяхъ типа $2h_1 + 2$ и типа $2g$, ибо члена, составляющіе ихъ, или перемѣнятъ знакъ, или же не перемѣнятъ, и осталось бывъ всѣ перемѣны и послѣдовательности сохранятся. Перемѣнъ будетъ μ, и останется. Такимъ образомъ общее число перемѣнъ въ уравненіяхъ $f(x) = 0$ и $f(-x) = 0$ будетъ

$$V + V_1 = 2\mu + \lambda.$$

откуда степень $$m = 2s + V + V_1.$$

Пусть въ разсматриваемомъ уравненіи содержится P положительныхъ корней, P' отрицательныхъ и $2J$ мнимыхъ. Степень уравненія равна числу его корней, такъ что

$$m = P + P' + 2J.$$

$$P + P' + 2J = 2s + V + V_1,$$

$$2J = 2s + (V - P) + (V_1 - P')$$

Если уравненіе не имѣетъ мнимыхъ корней, т.е. $2J = 0$, то

Лит. Общ. Техн. Училищъ. Ковнер.

$$2S + (V-P) + (V_1-P') = 0$$

Разности $V-P$ и V_1-P' не могут быть отрицательными, потому что по предыдущей теореме число перемен или больше, или равно числу корней, но не меньше. Если же допустить, что разности эти положительны, то оказается, что сумма трех существенно положительных величин равна нулю, потому что $2S$ существенно положительно. Этого быть не может и след. необходимо допустить, что обе разности отдельно равны нулю, т.е.

$$V = P \quad \text{и} \quad V_1 = P'$$

число перемен в точности равно числу корней. Кроме того отсюда же вытекает, что

$$2S = 0,$$

а так как $S = 2\Sigma\kappa + 2\Sigma h + 2\Sigma q$ и так как все κ, h, q существенно положительны, то S может быть нулем только в том случае, когда все κ, h, q отдельно суть нули, а это значит, что разность показателей двух соседних членов самое большее $=2$.

Следствие I. Если все корни уравнения действительны и положительны, то все члены уравнения на лицо и ни одного из них не пропало только перемены.

В самом деле (стр. 15) число m положительных корней равно числу перемен, т.е. и перемен m; они могут быть замечены необходимо каждому $m+1$ членами.

Следствие II. Если все корни уравнения $f(x)=0$ действительны, то произведение $(x-a)f(x)$, где a некоторое положительное число, содержит одной переменой больше, чем их находится в $f(x)$.

В каждом из уравнений

$$f(x)=0 \qquad (x-a)f(x)=0$$

число положительных корней равно числу перемен в левой части (стр. 15). Второе уравнение имеет один корень больше первого, потому что значение $x=a$ его удовлетворяет; след. и перемен у него на одну больше.

Теорема 16. Если въ рядѣ, составленномъ изъ функціи и ея производныхъ

$$f(x), f'(x), f''(x) \ldots f^m(x)$$

подставить двѣ дѣйствительныхъ величины α и $\beta > \alpha$, то число перемѣнъ, потерянныхъ рядомъ при переходѣ отъ $x=\alpha$ до $x=\beta$, равно числу корней уравненія $f(x)=0$, заключающихся между α и β. Предполагается, что всѣ корни функціи дѣйствительны.

Если x замѣнить послѣдовательно двумя перемѣнными, $x'+\alpha$ и $x'+\beta$, то высшій положительный корень уравненія $f(x'+\alpha)=0$ будетъ ближайшій корнемъ даннаго уравненія $f(x)=0$ и будетъ больше α, такимъ же образомъ уравненію $f(x'+\beta)=0$ удовлетворяютъ тѣ положительныхъ корней даннаго $f(x)=0$, которые больше β. Такъ число корней даннаго, большихъ α, равно числу положительныхъ корней преобразованнаго $f(x'+\alpha)=0$, и слѣд. равно числу перемѣнъ въ этомъ уравненіи; число корней, большихъ β, равно по тѣмъ же причинѣ числу перемѣнъ въ уравненіи $f(x'+\beta)=0$. Если уравненіе $f(x)=0$ имѣетъ p положительныхъ корней, большихъ α и q большихъ β, то число заключающихся между α и β равно разности $p-q$.

Уравненіе $f(x'+\alpha)$, расположенное по степенямъ x', будетъ

$$f(x'+\alpha) = f(\alpha) + \frac{x'}{1} f'(\alpha) + \frac{x'^2}{1.2} f''(\alpha) + \ldots + \frac{x'^m}{1.2 \ldots m} f^m(\alpha).$$

Знаки членовъ, а потому и перемѣнъ зависятъ только отъ знаковъ коэффиціентовъ

$$f(\alpha), f'(\alpha), f''(\alpha) \ldots f^m(\alpha) \quad \ldots \quad (1)$$

потому что x' и его степени, существенно положительны. Итакъ число корней большихъ α равно числу перемѣнъ въ рядѣ (1), а число корней, большихъ β — числу перемѣнъ въ томъ же рядѣ, если въ него подставить β вмѣсто α. Теорема Декарта: число корней, заключающихся между α и β, равно числу перемѣнъ, потерянныхъ рядомъ (1) при переходѣ отъ α къ β.

Теорема Будана.

Лемма. Каждый раз, как отношение функции къ первой ея производной $\frac{f(x)}{f'(x)}$ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$, переходитъ черезъ нуль, оно мѣняетъ знакъ съ (−) на (+).

Отношеніе $\frac{f(x)}{f'(x)}$ можетъ сдѣлаться нулемъ только если x дѣлается корнемъ $f(x)$, потому что $f'(x)$ дѣлается ∞ одновременно съ x. Это вытекаетъ изъ слѣд. II теор. 1: при достаточно большомъ z всю лѣвую часть $f(z)$ начиная со второго члена можно сдѣлать какъ угодно малой, но при этомъ первый ея членъ $A_0 z^m$ будетъ относительно z^m и слѣд. $f(z)$ обратится въ безконечность одновременно съ z. $f'(x)$ – цѣлая функція и слѣд. обладаетъ тѣмъ же свойствомъ, т.е. обращается въ ∞ одновременно съ x, но тогда и $f(x)=\infty$.

Пусть a есть корень уравненія $f(x)=0$, тогда по теоремѣ Тейлора

$$f(a+h) = f(a)+h.f'(a)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a)+\cdots+\frac{u^m}{1.2\ldots m}f^m(a)$$

и $$f'(a+h) = f(a)+h.f''(a)+\cdots\cdots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^n(a)+\cdots+\frac{u^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}f^m(a)$$

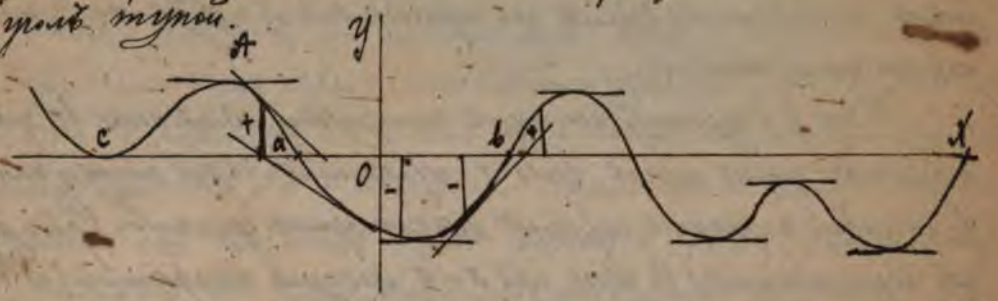
значеніе $x=a$ можетъ обращать въ нуль и нѣсколько производныхъ, пусть $f^n(x)$ первая производная, не обращающаяся въ нуль при $x=a$, тогда имѣемъ дѣленіе получимъ

$$\frac{f(a+h)}{f'(a+h)} = \frac{h}{n}\cdot\frac{f^n(a)+\cdots\cdots+\frac{h^{m-n}}{(n+1)\ldots m}f^m(a)}{f^n(a)+\cdots\cdots+\frac{h^{m-n}}{n\ldots(m-1)}f^m(a)}$$

потому что въ числителѣ вынесемъ за скобки множитель $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$, а въ знаменателѣ множитель $\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}$; по сокращеніи они дадутъ $\frac{h}{n}$. Второй множитель второй части при достаточно маломъ h стремится къ $\frac{f^n(a)}{f^n(a)}$, или къ 1. Слѣд. вся вторая часть будетъ стремиться къ $\frac{h}{n}$ и поэтому измѣнитъ его знакъ. Пока $f(x)$ не дошла еще до корня, h отрицательно и отношеніе отрицательно. Затѣмъ x продолжаетъ увеличиваться и дѣлается равнымъ a, тогда h, $f(x)$ и $\frac{f(x)}{f'(x)}$ нули. Далѣе h становится положительнымъ и отношеніе $\frac{f(x)}{f'(x)}$ тоже положительно.

Эту лемму можно доказать геометрически. Производная

многочлен выражает тангенс угла оси x с касательной к кривой, выражаемой начальным уравнением, поэтому, если данная величина x обращает производную в нуль, то касательная параллельна оси X. Если производная положительна, то касательная образует острый угол с осью, а если производная
то угол тупой.



Пусть a и b два корня $f(x)=0$. Пока функция не дошла еще до корня a, она положительна и делается отрицательной, когда перешла через корень. Производная остается отрицательной во время перехода, так как угол AaO тупой; след. отношение $\frac{f(x)}{f'(x)}$ во время перехода меняет знак с $(-)$ на $(+)$. То же самое и для корня b. Здесь функция сначала отрицательная, делается положительной после перехода; за то производная имеет все время знак $(+)$.

Если вместе с функцией обращается в нуль и производная, как напр. для $x=c$, то знак функции остается $(+)$ без изменения, а знак производной меняется с $(-)$ на $(+)$, так что отношение $\frac{f(x)}{f'(x)}$ и при переходе через двойной корень меняет знак с $(-)$ на $(+)$.

Следствие. Если $f(x)$ и ее $n-1$ производных обращаются в нуль при $x=a$, то ряд $n+1$ функций

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x)\ldots\ldots f^n(x)$$

дает n перемен для $x=a-h$ и представляет только последовательности при $x=a+h$, где h есть предельно малое положительное количество.

В самом деле, всякие две последние функции этого ряда имеют различные знаки при $x=a-h$, когда они не дошли еще до корня

и одинаковые знаки при $x = a+h$.

<u>Теорема 17.</u> Пусть m есть степень $f(x)$. Если въ рядъ

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x) \dots f^m(x) \qquad (1)$$

подставить двѣ дѣйствительныхъ величины α и $\beta > \alpha$, то ч[illegible] корней $f(x)=0$, заключающихся между α и β или равно числу [illegible]мѣнъ, потерянныхъ рядомъ при переходѣ отъ $x=\alpha$ до $x=\beta$, или на четное число меньше.

Рядъ (1) функцій можетъ потерпѣть измѣненіе въ знакахъ только въ томъ случаѣ, когда x переходитъ черезъ такую величину a, которая служитъ корнемъ нѣкоторыхъ функцій. Среди функцій, обращающихся въ нуль при $x=a$ могутъ встрѣтиться нѣсколько-сосѣднихъ. Пусть n функцій

$$f^{\mu}(x),\ f^{\mu+1}(x) \dots f^{\mu+n-1}(x),\ f^{\mu+n}(x)$$

представляетъ только перемѣны при $x=a-h$ и только послѣдовательности при $x=a+h$.

<u>Первый случай.</u> Если $\mu=0$, т.е. начальная функція $f(x)$ и ея $n-1$ производныхъ обращаются въ нуль при $x=a$, слѣд. если начальная функція имѣетъ n-кратный корень, то рядъ $n+1$ функцій теряетъ n перемѣнъ при переходѣ x отъ $x=a-h$ до $x=a+h$.

<u>Второй случай</u> $\mu > 0$. Если n число четное $2k$, то уравненіе $f^{\mu}(x)=0$ имѣетъ $2k$ корней равныхъ a и поэтому не мѣняетъ знака, когда x измѣняется отъ $a-h$ до $a+h$. Кромѣ того въ рядѣ

$$f^{\mu-1}(x),\ f^{\mu}(x),\ f^{\mu+1}(x) \dots f^{\mu+n-1}(x),\ f^{\mu+n}(x)$$

обнимающемъ n функцій, обращающихся въ нуль, функцію предшествующую имъ и послѣдующую функцію, знакъ $f^{\mu-1}(x)$ при томъ же измѣненіи x не мѣняется, поэтому рядъ потеряетъ $2k$ перемѣнъ при возрастаніи x отъ $a-h$ до $a+h$.

Если же n число нечетное $2k+1$, функція $f^{\mu}(x)$ имѣетъ $k+1$ равныхъ корней и поэтому мѣняетъ знакъ отъ $x=a-h$ до $x=a+h$. $f^{\mu-1}(x)$ знака по прежнему не перемѣняетъ; благодаря этому между $f^{\mu-1}(x)$ и $f^{\mu}(x)$ появится или потеряется перемѣна,

такъ что рядъ при переходѣ x отъ $a-h$ до $a+h$ потеряетъ четное число $(2\kappa+1) \pm 1$ перемѣнъ. Итакъ, сколько бы функцій, стоящихъ внутри ряда (1) ни обращалось въ нуль при нѣкоторомъ значеніи α, число перемѣнъ, теряющихся благодаря этому, есть число четное.

Отсюда слѣдуетъ, что каждый разъ, какъ x, возрастая отъ α до β, переходитъ черезъ корень нѣсколькихъ функцій ряда (1), рядъ теряетъ $\nu+2\kappa$ перемѣнъ, гдѣ ν есть кратность начальной функціи по этому корню, а 2κ — нѣкоторое четное число. Если N есть число равныхъ, или неравныхъ корней функціи $f(x)=0$ заключающихся между α и β, то число перемѣнъ теряемыхъ рядомъ (1) при переходѣ отъ α къ β, или равно N или превышаетъ N на четное число.

Слѣдствіе. Если уравненіе $f(x)=0$ имѣетъ p корней, заключающихся между α и β и рядъ (1) при переходѣ отъ α къ β теряетъ перемѣнъ на четное число 2κ больше, т.е. $p+2\kappa$, то уравненіе имѣетъ по крайней мѣрѣ 2κ мнимыхъ корней.

Въ самомъ дѣлѣ, если между $-\infty$ и α уравненіе имѣетъ q корней, между β и $+\infty$ имѣетъ τ корней, если кромѣ того уравненіе теряетъ $q+2\kappa'$ перемѣнъ при переходѣ отъ $-\infty$ къ α, и $\tau+2\kappa''$ перемѣнъ при переходѣ отъ β къ $+\infty$, то при $x=-\infty$ оно имѣетъ m перемѣнъ, а при $x=+\infty$ оно имѣетъ нуль послѣдовательностей. Такимъ образомъ число перемѣнъ, теряемыхъ при переходѣ отъ $-\infty$ къ $+\infty$

$$q+p+\tau+2\kappa'+2\kappa+2\kappa''=m$$

всѣхъ корней уравненіе имѣетъ m, число дѣйствительныхъ изъ нихъ

$$q+p+\tau,$$

отд. мнимыхъ

$$2J=q+p+\tau+2\kappa'+2\kappa+2\kappa''-q-p-\tau=2\kappa'+2\kappa+2\kappa''$$

понятно, что

$$2J \geqq 2\kappa.$$

Теорема Ролля.

Теорема 18. Между двумя последовательными корнями a и b уравнения $f(x)=0$ необходимо заключается корень производного $f'(x)=0$. Производное уравнение может иметь и больше корней между a и b, но число их всегда нечетное.

Если $b>a$ и если h есть положительное достаточно малое количество, то (лемма Будана) отношение $\frac{f(x)}{f'(x)}$ при переходе через корень меняет знак с $(-)$ на $(+)$; так что первое из двух отношений

$$\frac{f(a+h)}{f'(a+h)}, \quad \frac{f(b-h)}{f'(b-h)}$$

переходит через корень a, положительно, тогда как второе, не доходя еще до корня b, отрицательно — отношение переменило знак между корнями a и b, но a и b соседние корни, т.е. $f(x)$ не может обратиться где бы то ни было между a и b, не может переменить знака. Следовательно знак переменила производная $f'(x)=0$, т.е. производная необходимо имеет корень, заключающийся по величине между двумя соседними корнями функции. Ничего не препятствует тому, чтобы были и еще корни производной между a и b, но их необходимо нечетное число; в противном случае знак, переменившись два, четыре и т.д. раза, вернулся к прежнему, т.е. не переменился бы.

Геометрически это предложение вполне понятно. Кривая, пересекши ось X, не может вернуться к ней снова, не перегнувшись и не заставив где-нибудь иметь касательную сделаться параллельной оси. Если производная, не дойдя еще до второго корня дважды переменит свой знак, то это значит, что кривая загнулась еще раз и

удаляется отъ оси. Чтобы пересѣчь ось, ей необходимо загнуться третій разъ. См. предыдущій чертежъ.

Слѣдствіе I: Два сосѣдніе корня α и β производной $f'(x)=0$ не могутъ содержать болѣе одного корня начальной $f(x)=0$.

Если бы между α и β содержалось два корня a и b начальной функціи, то по предыдущей теоремѣ между a и b содержался бы по крайней мѣрѣ одинъ корень γ производной и α, β не были бы сосѣдними корнями.

Слѣдствіе II. Если всѣ корни уравненія $f(x)=0$ дѣйствительны, то корни производнаго уравненія $f'(x)$ тоже всѣ дѣйствительны и между двумя сосѣдними корнями одного изъ уравненій всегда заключается одинъ корень другого.

Пусть m есть степень и число корней начальнаго уравненія, тогда $m-1$ есть степень и число корней производнаго. По предыдущей теоремѣ между двумя сосѣдними корнями начальнаго заключается по крайней мѣрѣ одинъ корень производнаго. Такъ какъ число корней начальнаго на единицу больше числа корней производнаго, то очевидно корни не могутъ размѣститься иначе, какъ чередуясь, т. е. между двумя корнями начальнаго находится только одинъ корень производнаго и наоборотъ.

Теорема Ролля особенно пригодна, когда начальная функція сложна, а первая производная проще и когда нужно отыскать корни начальнаго. Вмѣсто этого отыскиваютъ корни производнаго; они будутъ служить предѣлами, въ которыхъ заключается по корню начальнаго.

Теорема Штурма.

Дано уравненіе $V=0$, не имѣющее равныхъ корней; если нѣсколько корней равны, то ихъ надо устранить, дѣля

на биномъ корня. Дана производная V_1. Остатокъ отъ дѣленія V на V_1 пусть будетъ $-V_2$; остатокъ отъ дѣленія V_1 на V_2 будетъ $-V_3$ и т. д. Понятно, что степень каждаго остатка ниже степени дѣлителя и дѣлителя; поэтому, если производить дѣленіе далѣе, то въ концѣ концовъ должены получиться остатокъ, представляющій постоянное количество A. Нуля получиться не можетъ, потомучто дѣленіе это совершенно такое, какъ при отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя въ той только разницѣ, что у каждаго остатка измѣняется знакъ, и если бы послѣдній остатокъ оказался нулемъ, то предпослѣдній дѣлитель бы служилъ наибольшимъ дѣлителемъ V и его производной V_1, слѣд. V имѣло бы кратные корни, что по условію нѣтъ. Такимъ образомъ получится рядъ $\mu+1$ функцій

$$V,\ V_1\ V_2\ V_3 \ldots\ V_{\mu-2}\ V_{\mu-1}\ A \quad \ldots \quad (1)$$

Теорема 1-я состоитъ въ слѣдующемъ. Если поставить въ рядъ (1) два дѣйствительныя величины α и $\beta > \alpha$, то число дѣйствительныхъ корней уравненія $V=0$, заключающихся между α и β, въ точности равно числу перемѣнъ, потеряннымъ рядомъ (1) при переходѣ отъ α къ β.

Пусть

$$Q_1\ Q_2 \ldots\ Q_{\mu-1}$$

суть частныя отъ дѣленія V на V_1, V_1 на V_2, $\ldots$ $V_{\mu-2}$ на $V_{\mu-1}$; получится такой рядъ равенствъ

$$\begin{aligned} V &= V_1 Q_1 - V_2 \\ V_1 &= V_2 Q_2 - V_3 \\ V_2 &= V_3 Q_3 - V_4 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{\mu-2} &= V_{\mu-1} Q_{\mu-1} - A \end{aligned}$$

которыя приводятъ къ двумъ положеніямъ:

1.) Два сосѣднія функціи ряда (1) не могутъ обращаться

в нуль одной и той же величиной x.

Во самомъ дѣлѣ, если бы какія нибудь V_k и V_{k+1} обращались въ нуль одной и той же величиной x, то равенство

$$V_{k-1} = V_k Q_k - V_{k+1} \quad \ldots \quad (2)$$

показывало бы, что и предшествующая функція V_{k-1} обратилась бы въ нуль и такимъ образомъ весь рядъ до самого начала. Но V и V_1 не могутъ имѣть общихъ корней, такъ какъ V не имѣетъ кратныхъ корней.

2) Если для нѣкотораго x одна изъ функцій, исключая первой, ряда (1) обращается въ нуль, то предшествующая и послѣдующая функція имѣютъ противоположные знаки.

Во самомъ дѣлѣ, если $V_k = 0$, то равенство (2) непосредственно показываетъ, что $V_{k-1} = -V_{k+1}$.

Пусть теперь x непрерывно возрастаетъ отъ α до β. Знаки функцій (1) могутъ измѣниться только при переходѣ нѣкоторыхъ изъ нихъ черезъ нуль; пусть при $x=a$ нѣкоторыя изъ функцій обращаются въ нуль.

Если въ нуль обращается какая-нибудь функція V_k — не первая, то сосѣднія функціи V_{k-1} и V_{k+1} не имѣютъ корня въ промежуткѣ отъ $x = a-h$ до $x = a+h$ и потому не измѣняютъ знака — пока x возрастаетъ отъ $a-h$ до $a+h$, при томъ знаки у нихъ различны. Итакъ частица ряда (1)

$$V_{k-1} \quad V_k \quad V_{k+1}$$

имѣетъ одну перемѣну для $x = a-h$, потому что знакъ V_k различенъ съ знакомъ одной изъ сосѣднихъ, и одну для $x = a+h$, потому что V_k, перемѣнивъ знакъ, будетъ перемѣну съ той изъ сосѣднихъ, съ которой у нея была послѣдовательность и наоборотъ.

Если при $x=a$ въ нуль обращается начальная функція V, то по леммѣ Будана отношеніе $\frac{V}{V_1}$ измѣнитъ знакъ съ минуса на плюсъ, т. е. при переходѣ черезъ корень начальной

функцій теряется одна перемѣна между v и ея производной v'.

Итакъ вообще, если x непрерывно возрастаетъ отъ α къ β, то число перемѣнъ ряда Штурма теряетъ измѣненіе только въ томъ случаѣ, когда начальная функція переходитъ черезъ нуль, именно тогда ряд теряетъ одну перемѣну и только одну.

Замѣчаніе 1. При послѣдовательныхъ дѣленіяхъ, которыя служатъ для отысканія функцій $v, v_1, v_2, \ldots v'$, можно умножать, или дѣлить дѣлителя и дѣлителем на любыя положительныя величины; благодаря этому функціи (1) освобождаются отъ знаменателей или раздѣленія на положительныя величины, что не измѣняетъ ихъ знака, и не повліяетъ на величину корней; но дѣлить и умножать на отрицательныя величины нельзя.

Замѣчаніе 2. Условіе, что послѣдняя функція A есть постоянное количество, вводится лишь для того, чтобы имѣть функцію, не мѣняющую знака при переходѣ x отъ α до β. Поэтому, если найдется въ срединѣ ряда такая функція v_3, которая не имѣетъ корней въ предѣлахъ отъ α до β и слѣд. не мѣняетъ знака при измѣненіи x, то ряд можно обрывать на этой функціи.

Замѣчаніе 3. Если случится, что одинъ изъ предѣловъ α, β самъ служитъ корнемъ нѣкоторыхъ функцій Штурмова ряда, то надо взять вмѣсто α $\alpha - h$, или $\beta + h$ вмѣсто β.

Замѣчаніе 4. Такъ какъ для вывода теоремы отъ ряда функцій требуются только два свойства, именно, чтобы ряд не имѣлъ числа перемѣнъ при прохожденіи черезъ корень одной изъ внутреннихъ функцій и чтобы онъ терялъ перемѣну, когда въ нуль обращается первая функція, то функція, полученная здѣсь вообще не единственна и во многихъ частныхъ вопросахъ удобнѣе бываетъ брать вмѣсто нихъ какія

нибудь другія.

Замѣчаніе 5. Условіемъ того, чтобы всѣ корни уравненія $V=0$ были дѣйствительны и различны, является требованіе, чтобы при переходѣ отъ $-\infty$ къ $+\infty$ ряда функцій потеряли m перемѣнъ, а для этого необходимо, чтобы ряд имѣл $m+1$ членовъ.

Способъ Фурье

Лемма. Если производная $f'(x)$ не имѣетъ корня въ предѣлахъ x_1 и x_2, то функція $\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ возрастаетъ, когда функція начальная $f(x)$ и ея вторая производная $f''(x)$ имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, и убываетъ, когда знаки $f(x)$ и $f''(x)$ различны.

Въ самомъ дѣлѣ $\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$

$$\varphi(x+h)=x+h-\frac{f(x)+hf'(x)+\dots}{f'(x)+hf''(x)+\dots}$$

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=x+h-x+\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f(x)+hf'(x)+\dots}{f'(x)+hf''(x)+\dots}$$

по приведеніи къ общему знаменателю

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=h-\frac{f(x)\cdot f'(x)+hf'^2(x)+\dots-f(x)\cdot f'(x)-hf(x)f''(x)-\dots}{f'^2(x)+hf''(x)+\dots}$$

не написанные члены содержатъ высшія степени h; по сокращеніи и раздѣленіи на h, получится первая производная

$$\varphi'(x)=\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=1-\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

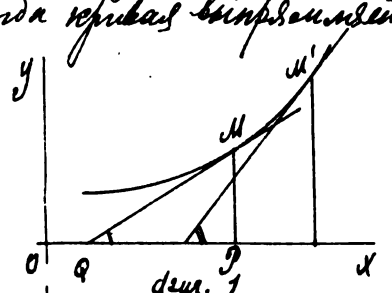
Наконецъ, если привести къ общему знаменателю, то

$$\varphi'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

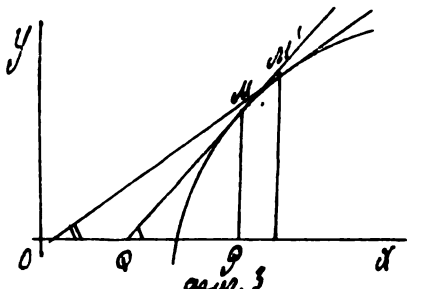
Отсюда видно, что знакъ производной $\varphi'(x)$ зависитъ отъ того, одинаковые, или разные знаки $f(x)$ и $f''(x)$: знакъ $f(x)$ не

вызвать, так как она входит в квадрат и след. всегда положительна. Но если первая производная положительна, то сама функция возрастает, а если первая производная отрицательна, то функция убывает. Итак $\varphi(x)$ возрастает, когда знаки $f'(x)$ и $f''(x)$ одинаковые, и $\varphi(x)$ убывает, когда знаки $f'(x)$ и $f''(x)$ разные. Надо помнить, что $f''(x)$ не должно обращаться в нуль; в противном случае $\varphi'(x)$ обращается в бесконечность.

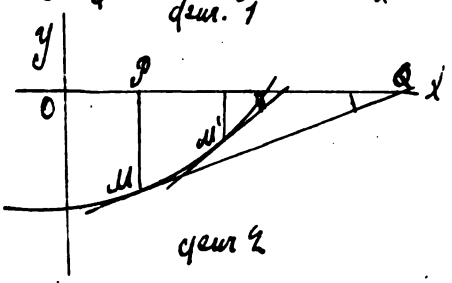
Чтобы пояснить геометрически предыдущий вывод, нужно сказать несколько слов о второй производной. Она выражает кривизну поверхности. Она положительна, когда кривая обращена выпуклостью вниз, как на фиг. 1 и 2, и отрицательна, когда кривая обращена выпуклостью вверх, как на фиг. 3 и 4; $f''(x)$ делается нулем в момент, когда кривая выпрямляется.



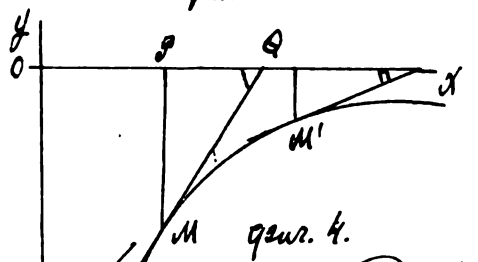
фиг. 1



фиг. 3



фиг 2



фиг. 4.

В этом можно убедиться, рассматривая первую производную по отношению к которой $f''(x)$ служит первой. Вообще в дифференциальном исчислении доказывается, что, пока функция убывает, первая производная отрицательна, она нуль, если функция = const., а когда функция возрастает, первая производная положительна.

Съ этой точки зрѣнія приведенные чертежи подтверждаютъ высказанное относительно второй производной $f''(x)$. Какъ извѣстно

$$OP = x\ ,\ MP = y = f(x)\ ,\ tg\, MQP = f'(x).$$

На первыхъ двухъ фигурахъ при увеличеніи x первая производная $tg\, MQP$ возрастаетъ, слѣд. $f''(x)$ положительно и въ самомъ дѣлѣ выпуклость кривой обращена внизъ. На вторыхъ двухъ при возрастаніи x первая производная убываетъ, вторая должна быть отрицательной; и дѣйствительно кривая обращена выпуклостью вверхъ.

Вспомогательная функція Фурье $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ выражаетъ разстояніе по оси X отъ начала до пересѣченія оси X съ касательной, потомучто $QP = \frac{MP}{tg\, MQP} = \frac{f(x)}{f'(x)}$, и слѣд.

$$\varphi x = \frac{f(x)}{f'(x)} = OP - QP = OQ.$$

Произведеніе $f(x) \cdot f''(x)$ положительно на фигурѣ 1 $[+f(x) \cdot +f''(x)]$ и на фиг. 4 $[-f(x) \cdot -f''(x)]$. Для этихъ случаевъ OQ возрастаетъ съ увеличеніемъ x; произведеніе отрицательно на фиг. 2. $[-f(x) \cdot +f''(x)]$ и на фиг. 3. $[+f(x) \cdot -f''(x)]$. Здѣсь OQ убываетъ съ возрастаніемъ x. Такимъ образомъ лемма доказана и геометрически.

<u>Слѣдствіе I</u>. Если въ предѣлахъ α и $\beta > \alpha$ уравненіе $f(x) = 0$ имѣетъ два корня, если кромѣ того $f''(x)$ не имѣетъ корней въ этихъ предѣлахъ, то вспомогательная функція Фурье для второго предѣла больше, чѣмъ для перваго

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} > \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть x' и x'' суть корни уравненія $f(x) = 0$, заключающіеся въ предѣлахъ α и β. По теоремѣ Ролля между x' и x'' непремѣнно заключается одинъ, или вообще нечетное число корней производнаго $f'(x)$, а такъ какъ $f''(x)$ по предположенію не мѣняетъ знака, то $f'(x)$ не можетъ

имѣетъ больше одного корня въ предѣлахъ α и β. Пусть этотъ корень есть x_1. По лемме Бюдона отношенія $\frac{f(x)}{f'(x)}$, $\frac{f'(x)}{f''(x)}$ отрицательны, пока x возрастаетъ отъ α до x', такъ какъ здѣсь нѣтъ корня ни для $f(x)$, ни $f'(x)$ и они будутъ больше. Тѣ же отношенія положительны, когда x возрастаетъ отъ x'' до β, потомучто здѣсь нѣтъ корня ни для $f(x)$, ни для $f'(x)$, а между тѣмъ обѣ онѣ перешли черезъ корни, при томъ $f(x)$ — послѣ $f'(x)$.

Итакъ внѣ предѣловъ x' и x'' знаки $f(x)$ и $f''(x)$ одинаковы: $f'(x)$ перемѣнила знакъ, а отношенія имѣютъ разные знаки. Но по лемме Фурье въ этомъ случаѣ $\varphi(x)$ возрастаетъ, т.е.

$$\varphi(\beta) > \varphi(x'') \quad \text{и} \quad \varphi(x') > \varphi(\alpha)$$

кромѣ того

$$\varphi(x') = x' \quad \text{и} \quad \varphi(x'') = x''$$

потомучто $\quad f(x') = 0 \quad$ и $\quad f(x'') = 0,$

слѣд.

$$\varphi(x'') > \varphi(x')$$

откуда

$$\varphi(\beta) > \varphi(x'') > \varphi(x') > \varphi(\alpha)$$

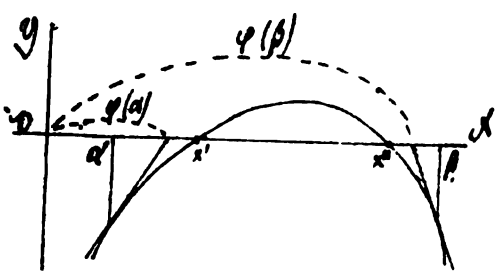
и слѣд.

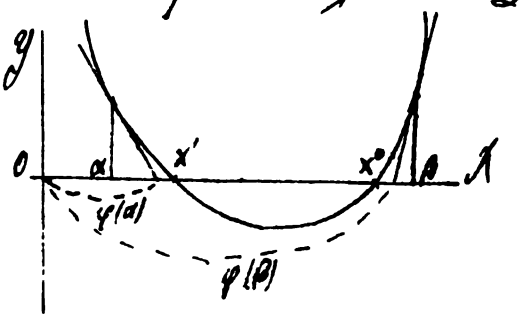
$$\varphi(\beta) > \varphi(\alpha)$$

или

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} > \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

Геометрически это очевидно; если кривая два раза пересѣкаетъ ось въ предѣлахъ α и β и если искривленіе идетъ въ одну





сторону, то $\varphi(\beta) > \varphi(\alpha)$.

<u>Слѣдствіе II</u> Если въ предѣлахъ α и $\beta > \alpha$ уравненіе $f(x) = 0$

не имѣетъ ни одного корня, а $f'(x)$ имѣетъ одинъ корень, если при томъ $f(x)$ и $f''(x)$ одного знака въ тѣхъ же предѣлахъ, но неравенство

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} > \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

можетъ существовать, но, сближая предѣлы, можно достигнуть того, что оно нарушится.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ въ предѣлахъ α и β уравненіе $f(x)=0$ не имѣетъ корня, но $f(x)$ не мѣняетъ знака при возрастаніи x отъ α до β, а $f'(x)$ имѣетъ одинъ разъ знакъ въ тѣхъ же предѣлахъ. Въ доказательствѣ теоремы Коши усмотримъ, что отношеніе $\frac{f(x)}{f'(x)}$ при переходѣ $f'(x)$ черезъ корень мѣняетъ знакъ съ (+) на (–): отъ значенія $x=\alpha$ до $x=x_1$ отношеніе $\frac{f(x)}{f'(x)}$ положительно, а начиная отъ $x=x_1$ до $x=\beta$ оно отрицательно, оно дѣлается безконечностью въ моментъ $x=x_1$.

Такъ какъ въ предѣлахъ отъ α до x_1 и отъ x_1 до β производная $f'(x)$ не имѣетъ корня и такъ какъ по предположенію знаки $f(x)$ и $f''(x)$ не мѣняются, то по леммѣ Фурье $\varphi(x)$ возрастаетъ въ предѣлахъ отъ α до x_1, и отъ x_1 до β.

Итакъ $\varphi(x)$ при возрастаніи x отъ α до x_1, растетъ отъ конечной величины $\varphi(\alpha)$ до весьма большой положительной величины. При $x=x_1$, $\varphi(x)=\infty$, такъ что она снова растетъ отъ весьма большой отрицательной величины до величины $\varphi(\beta)$. Слѣд.

$$\varphi(x) > \varphi(\alpha) \quad \text{въ предѣлахъ } x=(\alpha, x_1)$$

и

$$\varphi(\beta) > \varphi(x) \quad \text{въ предѣлахъ } x=(x_1, \beta)$$

но, если взять $x=\alpha'$ очень близкое къ x_1, но не равное ему, то $\varphi(\alpha')$ большая положительная величина, а если $x=\beta'$ очень близкое къ x_1, но лѣвѣе чѣмъ него, то $\varphi(\beta')$ очень большая отрицательная величина, т. е.

$$\varphi(\alpha') > \varphi(\beta')$$

Итакъ можно взять такія α' и β', достаточно близкія къ x', что неравенство дѣйствительно. I примѣчаніе зачѣмъ

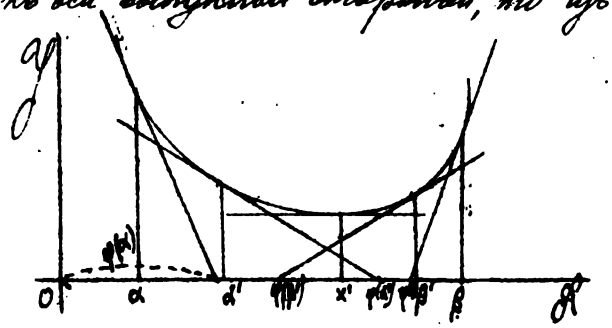
Листъ

Инв. № Зак. Тип. Лит.

окажется, что

$$\alpha' - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} > \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

Геометрически это понятно. Если въ предѣлахъ α и β кривая загибается, не встрѣчая оси X, т.е. $f(x)=0$ не имѣетъ корня, между тѣмъ, какъ $f'(x)=0$ имѣетъ корень; если при томъ искривленіе идетъ все время въ одну сторону, т.е. $f''(x)$ не мѣняетъ знака, и если знакъ $f(x)$ и $f''(x)$ одинъ и тотъ же, т.е. кривая обращена къ оси выпуклой стороной, то изъ черженса



видно, что разстояніе $\varphi(\beta)$ больше разстоянія $\varphi(\alpha)$ въ томъ случаѣ, когда α и β достаточно удалены отъ x_1, на наоборотъ $\varphi(\beta')$ дѣлается меньше $\varphi(\alpha')$, когда α' и β' достаточно приближаются къ x_1.

Доказавъ эти предварительныя положенія, можно теперь перейти къ самому методу Фурье.

По теоремѣ Бюдана, если рядъ

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x) \ldots\ldots f^m(x) \qquad (I)$$

при возрастаніи x отъ α до β теряетъ нѣсколько перемѣнъ, то число корней функціи $f(x)$, заключающихся въ предѣлахъ α, β или равно числу потерянныхъ перемѣнъ, или на четное число меньше. Такимъ образомъ, если рядъ не потерялъ ни одной перемѣны, то $f(x)'=0$ не имѣетъ ни одного корня въ указанныхъ предѣлахъ; если потеряна одна перемѣна, то между α и β необходимо заключается одинъ корень $f(x)=0$, тотомучто число корней, разумѣется, не можетъ быть отрицательнымъ; если же перемѣнъ потеряно двѣ, то уравненіе

$f(x)=0$ имѣетъ два корня, или же ни одного.

Пусть эти двѣ потери произошли между тремя первыми функціями, такъ что ряды

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x)$$

имѣютъ при $x=\alpha$ только перемѣны, а при $x=\beta$ только послѣдовательности. Такъ какъ по предположенію ряды (I) потеряли двѣ перемѣны, при чемъ потери произошли между тремя его первыми членами, то ряд, начинающійся $\alpha f''(x)$ совсѣмъ не теряетъ перемѣнъ, т.е. $f''(x)$ не мѣняетъ знака, корней $f''(x)=0$ въ указанныхъ предѣлахъ нѣтъ. Такъ какъ между $f'(x)$ и $f''(x)$ потеряна перемѣна, то $f'(x)$ одинъ разъ мѣняетъ знакъ, т.е. есть одинъ корень уравненія $f'(x)=0$.

Функція Фурье даетъ возможность точно опредѣлить, имѣетъ ли $f(x)=0$ два корня или не имѣетъ ни одного между α и β. Въ самомъ дѣлѣ, если бы после подстановки оказалось, что

$$\varphi(\beta) < \varphi(\alpha),$$

то (слѣд. II леммы Фурье) функція $f(x)$ между α и β не имѣетъ корней; если же

$$\varphi(\beta) > \varphi(\alpha)$$

то приходится произвести новое изслѣдованіе, именно взять нѣкоторое число γ, заключающееся по величинѣ между α и β. Нулевыхъ значеній γ можетъ быть сколько; или въ обоихъ предѣлахъ, т.е. между α и γ и между γ и β по подстановкѣ ихъ въ рядъ (1) оказывается потеряной по одной перемѣнѣ; тогда въ обоихъ предѣлахъ находится по одному корню функціи $f(x)=0$; или же одна потеря произойдетъ въ одномъ изъ предѣловъ, напр. между α и γ, тогда какъ въ другомъ — между γ и β не потеряется ни одной перемѣны; тогда дѣло сводится къ начальному случаю, т.е. снова надо взять число δ, заключающееся между α и γ и снова повторить

тона изслѣдованіе. Въ концѣ концовъ какое-нибудь изъ вставляемыхъ чиселъ должно раздѣлить два корня; или же послѣ нѣсколькихъ вставокъ обнаружится, что для какихъ нибудь двухъ вставленныхъ x и $\lambda > x$ существуетъ неравенство $\varphi(\lambda) < \varphi(x)$; это служитъ признакомъ, что между α и β уравненіе $f(x)=0$ корней не имѣетъ.

Повидимому предыдущее разсужденіе обнимаетъ только одинъ частный случай, именно, когда перемѣны потеряны между тремя первыми членами разсматриваемаго ряда, но дальнѣйшее покажетъ, что остальные случаи сводятся къ только что разобранному.

Пусть Δ_n выражаетъ число потерь, которое произойдетъ, въ части ряда

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x) \ldots\ldots f^m(x),\ \ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

начинающейся съ $f^n(x)$, при возрастаніи x отъ α до β. Такимъ образомъ Δ_0 есть число перемѣнъ, теряемыхъ всѣмъ рядомъ $f(x) \ldots\ldots f^m(x)$; Δ_1 — число потерь ряда $f'(x) \ldots\ldots f^m(x)$; Δ_2 — ряда $f''(x) \ldots\ldots f^m(x)$ и т. д. Послѣдняя Δ_m въ рядѣ

$$\Delta_0,\ \Delta_1,\ \Delta_2, \ldots\ldots \Delta_{m-1},\ 0$$

всегда равна нулю, потому что $f^m(x)$ есть постоянное количество и знака слѣд. не мѣняетъ.

<u>Примѣръ:</u> Если рядъ (I) принимаетъ такія значенія

при $x=\alpha$	$1, -2, +4, -6, +7$
при $x=\beta$	$2, +3, -4, -8, +7,$

то указатели потерь перемѣнъ будутъ

$$\Delta_0=2,\ \Delta_1=1,\ \Delta_2=1,\ \Delta_3=0,\ \Delta_4=0$$

Если получится нуль гдѣ-нибудь раньше, чѣмъ при Δ_m, какъ случилось въ приведенномъ примѣрѣ, то вычисленіе можно оборвать на первомъ Δ равномъ нулю. Въ частномъ случаѣ, если $\Delta_0=0$, то это служитъ признакомъ, что корня $f(x)=0$ въ данныхъ предѣлахъ нѣтъ.

Если $\Delta_0 = 1$, то, двигая предельы, можно добиться $\Delta_1 = 0$, потомучто $\Delta_0 = 1$ служитъ признакомъ, что $f(x)$ имѣетъ болѣе корень и слѣд. не можетъ имѣть общаго корня съ своей производной $f'(x)$, т.е. между корнемъ $f(x) = 0$ и ближайшимъ къ нему корнемъ $f'(x) = 0$ существуетъ нѣкоторый промежутокъ. Благодаря этому можно, какъ предѣлы взять такіе α' и β', что они отдѣлятъ корень функціи отъ корней производной и окажется $\Delta_1 = 0$, т.е. производная $f'(x) = 0$ не имѣетъ корней въ предѣлахъ α' и β'. Такъ какъ каждая изъ функцій ряда (I) служитъ первой производной по отношенію къ предыдущей, то выведенное выше относительно Δ_0 относится и ко всякому Δ_n.

Ни одна изъ функцій не можетъ имѣть болѣе двухъ корней въ предѣлахъ α и β, такъ какъ весь рядъ (1) по предположенію теряетъ въ нихъ двѣ перемѣны; ни одна изъ Δ по этому тоже не можетъ быть болѣе двухъ. Она или 0, или 1, или 2. Если же нѣкоторая $\Delta_n = 1$, то предыдущая Δ_{n-1} необходимо $= 2$; въ самомъ дѣлѣ Δ_{n-1} не можетъ быть нулемъ, такъ какъ ряда $f^n(x) \ldots f^m(x)$ теряетъ уже одну перемѣну, переходя отъ α къ β, а ряда $f^{n-1}(x) \ldots f^m(x)$ не можетъ при томъ же переходѣ потерять менѣе чѣмъ перемѣнъ. Δ_{n-1} не можетъ быть и единицей, потомучто Δ_n по предположенію есть первый, считая слѣва, указатель, равный единицѣ и, если бы Δ_{n-1} было равно 1, то надо бы было взять его, а не Δ_n. Итакъ выведено, что, если $\Delta_n = 1$, то

$$\Delta_{n-1} = 2, \quad \Delta_n = 1, \quad \Delta_{n+1} = 0$$

$\Delta_{n-1} = 2$ показываетъ, что въ рядѣ, начинающемся съ $f^{n-1}(x)$ теряется двѣ перемѣны. Функціи Фурье показываютъ соотвѣтствуетъ ли это случаю, когда $f^{n-1}(x)$ имѣетъ два корня, или же, когда корней нѣтъ. Въ первомъ случаѣ предѣлы α и β можно отдѣлить такимъ γ, что между α и γ, а также

между γ и β будетъ содержаться по одному корню, и окажется, что въ новыхъ предѣлахъ $\Delta_{n-1} = 1$, т.е. единица передвинулась на одно мѣсто влѣво. Къ $\Delta_{n-1} = 1$ относится все, что сказано объ $\Delta_n = 1$. Опять можно отдѣлить предѣлы, такъ что Δ_{n-2} окажется единицей и т.д. Если все время не встрѣтится мнимыхъ, или равныхъ корней, то можно достигнуть послѣдовательнымъ отдѣленіемъ того, что $\Delta_0 = 1$, т.е. найти предѣлы, въ которыхъ заключается корень начальной функціи.

Если изслѣдованіе Фурье покажетъ, что $f^{n-1}(x)$ не имѣетъ корней въ предѣлахъ α и β, т.е. корни его мнимы, то и въ этомъ случаѣ можно Δ равную 1 передвинуть влѣво. Въ самомъ дѣлѣ, если $\Delta_{n-1} = 2$, рядъ $f^{n-1}(x) \ldots f^{m}(x)$ теряетъ двѣ перемѣны, то ряды, начинающіеся съ предыдущихъ функцій, не могутъ потерять меньше двухъ перемѣнъ при переходѣ отъ α къ β; поэтому 2 можно вычесть изъ всѣхъ

$$\Delta_{n-1}, \Delta_{n-2}, \ldots \Delta_0$$

и тогда $\Delta_{n-1} = 0$. Тогда или окажется, что $\Delta_0 = 0$, или $\Delta_0 = 1$, или $\Delta_0 =$ какому-нибудь числу большему единицы. Въ первомъ случаѣ корней $f(x) = 0$ нѣтъ, во второмъ она имѣетъ одинъ корень, въ третьемъ же случаѣ между Δ_0 и $\Delta_{n-1} = 0$ долженъ необходимо содержаться индексъ $\Delta_k = 1$, потому что сосѣднія Δ или равны другъ другу, или отличаются не больше, какъ на единицу, и Δ равная 1 передвинется влѣво.

Что предыдущая Δ отличается самое большее на 1 отъ послѣдующей, видно изъ самого значенія указателя Δ. Какой нибудь Δ_{i-1} получается изъ Δ_i прибавкой мнимой функціи f^{i-1}. Прибавка эта не можетъ измѣнить число потерянныхъ рядомъ перемѣнъ больше, чѣмъ на 1.

Сказанное относительно мнимыхъ корней, справедливо и для равныхъ.

Итакъ, указатель, равный единицѣ, всегда можно перенести влѣво, т.е. достигнуть или того, что будетъ $\Delta_0 = 0$ или же, что

$$\Delta_0 = 1 \text{ и слѣд. } \Delta_1 = 0$$

§ 21. Вычисленіе корней.

Когда корень уравненія отдѣленъ, можно оперировать какъ удобнѣе тѣсно предѣлы, въ которыхъ корень заключается, что позволитъ вычислить корень съ какою угодно степенью точности.

Способъ Ньютона.

Пусть

$$f(x) = 0$$

есть уравненіе n-ой степени, и пусть a есть первая величина, приближающаяся къ нѣкоторому корню разсматриваемаго уравненія. Если $a+h$ есть слѣдующая величина, приближающаяся къ тому же, то

$$f(a+h) = 0$$

или, если разложить по Тейлору,

$$f(a) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^m}{1.2 \ldots m} f^m(a) = 0,$$

откуда

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f''(a)}{f'(a)} \cdot \frac{h^2}{1.2} - \ldots - \frac{f^m(a)}{f'(a)} \frac{h^m}{1.2 \ldots m}$$

Старшими степенями h можно пренебречь, полагая самое h только приближающейся величиной. Тогда

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

и если положимъ, что

$$b = (a+h) = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

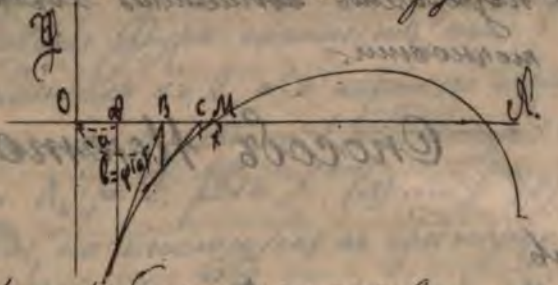
то b будетъ новая величина, приближающаяся къ корню болѣе, чѣмъ a. Исходя изъ b, можно поступить съ нимъ

такъ же, какъ съ a, тогда

$$c = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

и т. д. Способъ Ньютона позволяетъ получить очень значительное приближеніе небольшимъ числомъ его примѣненій, такъ что примѣнивъ его три, четыре раза и корень уже вычисленъ съ точностью, далеко превосходящей требованія практики.

Геометрическій смыслъ этого способа. Приближающаяся величина въ сей ничто иное, какъ $\varphi(a)$, т. е. вмѣсто предѣла $a = OA$ берется разстояніе до пересѣченія касательной $b = \varphi(a) = OB$. Далѣе вмѣсто b берутъ $c = \varphi(b) = OC$.



Насколько быстро приближаются $a, b, c, \ldots$ къ корню M, видно изъ чертежа.

Слѣдующій способъ дастъ возможность вычислить x изъ уравненія первой степени. Пусть a, b, два предѣла между которыми заключается корень x. Въ уравненіи

$$f(x) = 0$$

можно послѣдовательно замѣнить x черезъ $x - a + a$ и $x - b + b$, а далѣе разсматривать, какъ перемѣнныя a и b, и $x - a$ и $x - b$ какъ прибавки; онѣ вообще величины небольшія; такимъ образомъ

$$f\{a + (x-a)\} = 0 \quad \text{и} \quad f\{b + (x-b)\} = 0$$

или, если разложить по Тейлору

$$f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \ldots = 0$$

$$f(b) + \frac{x-b}{1} f'(b) + \frac{(x-b)^2}{1 \cdot 2} f''(b) + \ldots = 0$$

Остальные члены можно отбросить по незначительности высшихъ степеней $(x-a)$ и $(x-b)$. Теперь надо полученныя уравненія раздѣлить на $f''(a)$ и $f''(b)$, тогда

$$\frac{f(a)}{f''(a)} + \frac{x-a}{1}\,\frac{f'(a)}{f''(a)} + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} + \dots = 0$$

$$\frac{f(b)}{f''(b)} + \frac{x-b}{1}\,\frac{f'(b)}{f''(b)} + \frac{(x-b)^2}{1\cdot 2} + \dots = 0$$

и вычесть второе изъ перваго.

$$\frac{f(a)}{f''(a)} - \frac{f(b)}{f''(b)} + \frac{x\,f'(a)}{f''(a)} - x\,\frac{f'(b)}{f''(b)} + \frac{b\,f'(b)}{f''(b)} - \frac{a\,f'(a)}{f''(a)} + \frac{1}{2}(2x-a-b)(b-a) = 0$$

или освобождая отъ знаменателей.

$$2f(a)f''(b) - 2f(b)f''(a) + 2b\,f'(b)f''(a) - 2a\,f'(a)f''(b) +$$
$$+ 2f'(a)f''(b)x - 2f'(b)f''(a)x + (2x-a-b)(b-a) = 0$$

или $$2\left[f(b) - b\,f'(b)\right]f''(a) - 2\left[f(a) - a\,f'(a)\right]f''(b) + a^2 - b^2 +$$
$$+ 2x\left[f'(a)f''(b) - f'(b)f''(a) + b - a\right] = 0$$

откуда
$$x = \frac{2\left[f(a) - a\,f'(a)\right]f''(b) - 2\left[f(b) - b\,f'(b)\right]f''(a) + b^2 - a^2}{2\left[f'(a)f''(b) - f'(b)f''(a) + b - a\right]}$$

Такимъ образомъ x опредѣляется изъ линейнаго уравненія. Надо замѣтить, что этотъ способъ возможенъ лишь тогда, когда $x-b<1$ и $x-a<1$; иначе высшія степени ихъ будутъ больше первыхъ степеней и ихъ нельзя будетъ отбросить. Поэтому обыкновенно способомъ Ньютона опредѣляютъ первыя приближенія и надъ ними уже производятъ дѣйствія второго способа.

Добавленіе къ Ньютонову способу.

Способъ Ньютона не оставляетъ ничего желать по своей простотѣ, но онъ требуетъ постепеннаго приближенія къ корню отъ одного предѣла, тогда какъ способъ приближенія долженъ указать два предѣла, въ которыхъ заключенъ корень, иначе приходится вычислять каждый разъ степень приближенія. Но не трудно такъ видоизмѣнить этотъ способъ, что онъ дастъ и другой предѣлъ.

Если α и β два предѣла, въ которыхъ заключается корень $f(x)=0$, то функція
$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$
какъ было сказано, возрастаетъ, или убываетъ въ зависимости отъ того, одинаковые или разные знаки функцій $f(x)$ и $f''(x)$,

потомъ что первая производная

$$\varphi'(x) = \frac{f''(x)\,f(x)}{(f'(x))^2}$$

положительна, когда знаки одинаковые, и отрицательна, когда они разные.

1.) Если въ предѣлахъ α и β находится кратный корень, такъ что $f(x)=0$ и $f''(x)=0$ имѣютъ общій корень, то знаки ихъ или все время одинаковые, или все время разные, $\varphi(x)$ возрастаетъ все время, или же все время убываетъ, такъ что

$$\varphi(\alpha) < \varphi(x_0) < \varphi(\beta)$$

или же

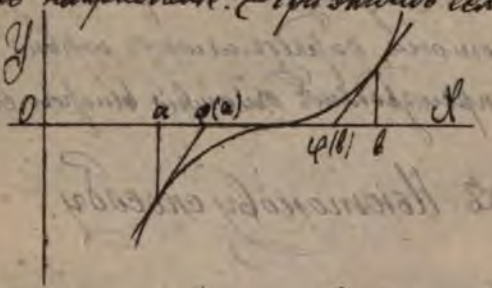
$$\varphi(\alpha) > \varphi(x_0) > \varphi(\beta)$$

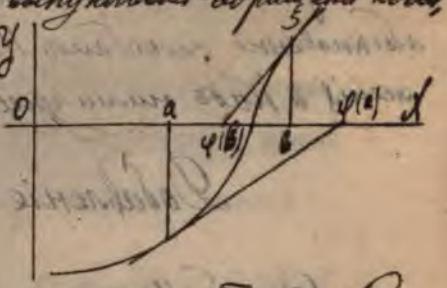
Иначе говоря, такъ какъ $\varphi(x_0) = x_0$, то

$$\varphi(\alpha) < x_0 < \varphi(\beta)$$

$$\varphi(\alpha) > x_0 > \varphi(\beta)$$

Такимъ образомъ найдены два предѣла $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$, въ которыхъ заключается корень. Геометрически это соотвѣтствуетъ случаю, когда искривленіе кривой въ моментъ пересѣченія ея съ осью мѣняетъ направленіе. При этомъ если выпуклость обращена къ оси,





то $\varphi(x)$ возрастаетъ, а если вогнутостью, то $\varphi(x)$ убываетъ. Способомъ Ньютона можно эти предѣлы сблизить.

2.) Если $f(x)$ не имѣетъ равныхъ корней въ предѣлахъ α и β, то $f''(x)$ не мѣняетъ знака, а $f(x)$ мѣняетъ, такъ что $\varphi(x)$ или сначала возрастаетъ, а послѣ перехода черезъ корень убываетъ, или же сначала убываетъ, потомъ возрастаетъ, такъ что

или

$$\varphi(\alpha) > x_0 \text{ и } \varphi(\beta) > x_0$$

или

$$\varphi(\alpha) < x_0 \text{ и } \varphi(\beta) < x_0$$

предѣлы Ньютона находятся по одну сторону корня.

Въ такомъ случаѣ рядомъ съ $\varphi(x)$ надо еще разсмотрѣть функцію

$$\psi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - M(x-x_0)^2,$$

гдѣ M есть постоянная величина, большая чѣмъ половина наибольшаго значенія дроби $\frac{f''(x)}{f'(x)}$ и имѣющая знакъ этой дроби, такъ что

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = 2M\vartheta \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ

$$0 < \vartheta < 1$$

Пусть

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \lambda(x-x_0) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Какъ извѣстно, производная

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)\,f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f''(x)}{f'(x)}$$

слѣд. производная

$$\psi'(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f''(x)}{f'(x)} - 2M(x-x_0)$$

или, если $\frac{f(x)}{f'(x)}$ и $\frac{f''(x)}{f'(x)}$ замѣнить изъ формулъ (1),(2), то

$$\psi'(x) = 2M\vartheta\lambda(x-x_0) - 2M(x-x_0)$$

или

$$\psi'(x) = -2M(x-x_0)(1-\lambda\vartheta)$$

$\psi(x)$ очевидно возрастаетъ и убываетъ въ зависимости отъ знака $\psi(x)$.

I. Если знаки $f(x)$ и $f''(x)$ одинаковые, то $\varphi(x)$ растетъ, слѣд. для $x=(\alpha, x_0)$

$$\varphi(x) < x_0$$

или

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} < x_0 \quad \text{или} \quad \frac{f(x)}{f'(x)} > x - x_0$$

а такъ какъ по формулѣ (2)

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \lambda(x-x_0)$$

то

$$\lambda > 1$$

при томъ M тоже отрицательно, такъ какъ $f(x)$ и $f'(x)$ до корня разныхъ знаковъ, слѣд. $f'(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ разные знаки для $x=(\alpha, x_0)$. Такимъ образомъ въ $\psi'(x)$ входятъ множителями три минуса, т.е. $\psi'(x)$ отрицательно, $\psi(x)$ убываетъ. Итакъ $\psi(x_0) < \psi(\alpha)$, или

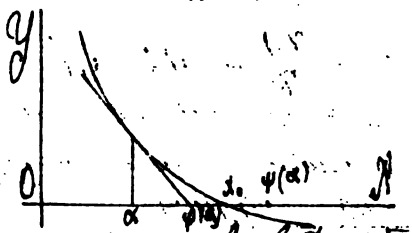
$$x_0 < \psi(\alpha)$$

но для случая одинаковыхъ знаковъ функцій $f(x)$ и $f''(x)$

$$\varphi(x) < x_0$$

Итакъ найдены предѣлы корня $\varphi(x) < x_0 < \psi(x)$.

Геометрически это соотвѣтствуетъ случаю, когда кривая обращена къ оси выпуклой стороной и x не дошло до корня.



Можно замѣнить x_0 черезъ β въ разности $(x-x_0)$, тогда

$$x_0 < \psi(x),$$

или

$$x_0 < \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - M(\alpha-\beta)^2$$

II. Если знаки $f(x)$ и $f''(x)$ разные, то послѣ перехода черезъ корень они будутъ одинаковые, потомучто $f''(x)$ не мѣняетъ знака въ предѣлахъ α, β, такъ что для $x=(x_0,\beta)$ функція $\varphi(x)$ возрастаетъ, т.е.

$$\varphi(x) > x_0$$

или $x - \frac{f(x)}{f'(x)} > x_0$ или $\frac{f(x)}{f'(x)} < x - x_0$

а такъ какъ $\frac{f(x)}{f'(x)} = \lambda(x-x_0)$

то $\lambda < 1$: скобка $(1-\lambda\vartheta)$ положительна, но за то и M положительно, такъ какъ до корня знаки $f(x)$ и $f'(x)$ разные, и слѣд. знаки $f'(x)$ и $f''(x)$ одинаковые. Итакъ въ функцію

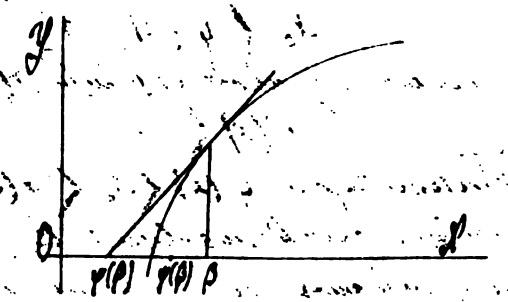
$$\psi'(x) = -2M(x-x_0)(1-\vartheta\lambda)$$

входятъ множителями два плюса и одинъ минусъ. Слѣд. $\psi'(x)$ отрицательно и $\psi(x)$ убываетъ $\psi(\beta) < x_0$

а такъ какъ $x_0 < \varphi(\beta)$

то предѣлы найдены $\psi(\beta) < x_0 < \varphi(\beta)$.

Геометрически это соотвѣтствуетъ случаю, когда кривая сначала обращена къ оси вогнутой стороной, а послѣ перехода черезъ корень выпуклой.



Приложеніе.

Теорія Детерминантовъ

по Достору.

Теорія детерминантовъ.

Понятіе о детерминантахъ и ихъ общія свойства.

Прежде, чѣмъ приступить къ теоріи детерминантовъ, необходимо сказать нѣсколько словъ о перемѣщеніяхъ, на которыхъ главнымъ образомъ построена эта теорія. Чтобы надобности выводить нѣкоторыя уже формулы перемѣщеній, важно только указать практическій способъ ихъ полученія, что необходимо для уясненія одного изъ главныхъ принциповъ этой теоріи.

Представимъ себѣ 4 различныхъ предмета и назовемъ ихъ номерами: $1^{\text{й}}, 2^{\text{й}}, 3^{\text{й}}, 4^{\text{й}}$ такъ что нормальный порядокъ предметовъ будетъ 1, 2, 3, 4. При перемѣщеніи предметовъ этой группы будемъ руководствоваться слѣдующимъ правиломъ: нужно переставлять послѣдній по порядку предметъ со вторымъ отъ конца или съ третьимъ, когда нельзя со вторымъ; когда исчерпаются всѣ перемѣщенія съ даннымъ и тѣмъ же первымъ (по порядку), то этотъ первый предметъ перемѣстить съ предметомъ, стоящимъ подъ слѣдующимъ номеромъ, и съ вновь получившимся перемѣщеніемъ поступать по предыдущему, пока не исчерпаются перемѣщенія, имѣющія этотъ второй предметъ (по нормальному порядку) на первомъ мѣстѣ и т. д. Приложимъ это правило къ нашему случаю четырехъ предметовъ 1, 2, 3, 4; тогда поступимъ такъ: переставивъ послѣдній $4^{\text{й}}$ предметъ со вторымъ отъ конца, получимъ перемѣщеніе 1243, въ которомъ переставимъ уже послѣдній съ третьимъ отъ конца (перемѣщая со вторымъ, мы вернулись бы къ нормальному порядку); получимъ 1342, въ которомъ

можемъ перемѣстить послѣдній со вторымъ отъ конца, и т. д.; когда дойдемъ до послѣдняго переложенія, начинающагося съ 1, т. е. 1432, то въ немъ первый предметъ перемѣщаемъ со вторымъ (по нормальному порядку) и, получивъ переложеніе 2431, повторяемъ съ нимъ всѣ тѣ же дѣйствія

1234	2431	3124	4321
1243	2413	3142	4312
1342	2314	3241	4213
1324	2341	3214	4231
1423	2143	3412	4132
1432	2134	3421	4123

Наиболѣе важная для насъ особенность этого способа состоитъ въ томъ, что каждое переложеніе получается изъ предыдущаго только одною перестановкой двухъ элементовъ. На основаніи этого мы можемъ во всѣхъ переложеніяхъ замѣтить слѣдующій законъ: если число инверсій въ переложеніи четно, то оно получилось изъ первоначальнаго путемъ четнаго числа перестановокъ, если же нечетно, то нечетнымъ числомъ перестановокъ. (Инверсія — такое положеніе элементовъ, когда старшій элементъ стоитъ впереди младшаго). Возьмемъ напр. переложеніе 2341; въ немъ три инверсіи, именно: 2 стоитъ впереди 1 — одна инверсія, 3 впереди 1 — другая, 4 впереди 1 — третья. Посмотрѣвъ на приведенную выше таблицу, [illegible] отъ порядка 1234 до 2341 мы дошли 9-ю перестановками, т. е. нечетнымъ ихъ числомъ; слѣд. въ данномъ случаѣ указанный законъ оправдывается. Но несомнѣнно, что отъ 1234 до 2341 мы можемъ дойти и при помощи числа перестановокъ ≥ 9; докажемъ, что число ихъ будетъ всегда нечетно.

Возьмемъ переложеніе такого вида:

$$m \ldots\ldots p \ldots\ldots q \ldots\ldots s$$

Вставимъ въ нем одну перестановку между p и q, такъ что получимъ

$$m \ldots\ldots q \ldots\ldots p \ldots\ldots s.$$

и посмотримъ, какое вліяніе эта перестановка окажетъ на число инверсій. Обозначимъ для краткости совокупность элементовъ, стоящихъ передъ p въ первомъ и передъ q во второмъ случаѣ, черезъ A, элементы между p и q черезъ B, а послѣ нихъ черезъ C; тогда имѣемъ такія два перемѣщенія:

$$m\,Ap\,Bq\,Cs \quad \text{и} \quad m\,Aq\,Bp\,Cs$$

Въ нихъ элементы A не играютъ никакой роли въ измѣненіи числа инверсій, такъ какъ всѣ элементы, стоявшіе послѣ нихъ въ первомъ случаѣ, стоятъ послѣ и во второмъ. Точно такова и C, такъ какъ всѣ элементы, которые были влѣво отъ него, и остались влѣво. Элементы же группы B могутъ измѣнить число инверсій. Всѣ эти элементы, положивъ $q > p$, мы можемъ разбить на три группы: 1-ая гр. — элементы $< p$, слѣд. а fortiori $< q$; 2-ая гр. — элементы $> q$, а слѣд. и больше p; 3-я гр. — элементы $> p$ и $< q$. Элементы первой группы давали инверсіи съ p, а во второмъ случаѣ они дадутъ ихъ столько же съ q, элементы второй группы давали инверсіи съ q, (не давая съ p), а во второмъ случаѣ дадутъ ихъ столько же съ p, уже не давая съ q; слѣд. по числу инверсій не измѣнятъ. Остается одна третья группа. Ея элементы въ первомъ случаѣ совсѣмъ не давали инверсій съ p и q, а во второмъ они дадутъ ихъ четное число. Дѣйствительно, если они, какъ $> p$, дадутъ n новыхъ инверсій съ p, то, какъ $< q$, дадутъ столько же инверсій съ q (во второмъ случаѣ). А такъ какъ p и q, переставшись, сами дадутъ одну инверсію, то всѣхъ новыхъ инверсій будетъ $2n+1$, т.е. отъ одной перестановки образуется всегда нечетное число инверсій, а слѣд., если 2-ая — четное, если 3-я — нечетное и т.д. Итакъ

Высшая алгебра Листокъ

Лит. Отд. Унив. Учеб. Пособ. Листокъ.

законъ нами доказанъ. Перейдемъ теперь къ понятію о детер-минантѣ.

Представимъ себѣ систему изъ n^2 буквъ (надъ которыми раз-умѣется какія-нибудь количества) такого вида:

$$\begin{array}{llll} a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots\ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \ldots\ldots\ldots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \ldots\ldots\ldots & c_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ p_1 & p_2 & p_3 \ldots\ldots\ldots & p_n \\ q_1 & q_2 & q_3 \ldots\ldots\ldots & q_n \end{array}$$

Горизонтальные столбцы отличаются у насъ названіемъ буквъ, а вертикальные — показателями при этихъ буквахъ, поставлен-ными внизу и называемыми индексами.

Сдѣлаемъ теперь всѣ возможныя переложенія изъ n дан-ныхъ буквъ, игнорируя пока индексы; число ихъ, какъ извѣст-но, будетъ $1.2.3.4 \ldots n$; одно изъ нихъ будетъ, напримѣръ $abc \ldots p \ldots q$, другое $bca \ldots p \ldots q$, и т.д.; чтобы указать, изъ какого вертикальнаго столбца взять отдѣ буквы, мы долж-ны дать имъ извѣстные индексы; условимся каждой буквѣ давать индексъ по мѣсту, занимаемому ею въ переложеніи, т.е.

$$a_1 b_2 c_3 \ldots p_n \ldots q_n, \quad b_1 c_2 a_3 \ldots p_n \ldots q_n, \text{ и т.д.}$$

Каждый изъ полученныхъ такимъ образомъ переложеній можно опредѣлить, какъ рядъ буквъ, взятыхъ изъ всей системы такъ, что изъ каждаго вертикальнаго и горизонтальнаго столбца, берется только одна буква, стоящая на ихъ мѣстѣ ихъ пересѣ-ченія. Если мы теперь представимъ себѣ, что всѣ буквы въ каждомъ переложеніи перемножены между собою и всѣ $1.2.3 \ldots n$ полученныя произведенія сложены, то такой многочленъ и носитъ названіе детерминанта n-го порядка, а составляю-щія произведенія — членовъ детерминанта. Знаки у членовъ

неодинаковы, а определяется числом инверсий: знак положителен, когда число инверсий четно, и отрицателен, когда оно нечетно. Вместо n разных букв можно, конечно, брать и одну и ту же букву, но тогда для отличия горизонтальных строк одной от другой ставить перед применяемыми индексами новые, указывающие по порядку на эти строки; тогда система примет вид (1). Если хотят обозначить, что из этой системы составляется детерминант, то квадрат букв заключают в прямые скобки, как (2).

$$(1)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots\dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots\dots a_{3n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots\dots a_{nn} \end{matrix} \qquad (2)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Иначе обозначают детерминантъ такъ: пишутъ просто главный (взятый по діагонали) членъ его, поставивъ передъ нимъ $\Sigma\pm$, т.е. $\Sigma\pm a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$, или же пишутъ одинъ изъ элементовъ, заключивъ его въ прямоугольныя скобки $[a_{kl}]$. Если же желаютъ только упомянуть о детерминантѣ, не указывая, какой онъ именно, то ставятъ просто букву $\underline{D}$ или $\underline{\Delta}$. //

Вернемся къ составленію детерминанта; если сдѣлаемъ изъ данныхъ n элементовъ всѣ возможныя перестановки и припишемъ въ каждомъ всѣ индексы по порядку отъ 1 до n и если затѣмъ каждому члену дадимъ знакъ сообразно числу инверсій въ немъ, то получимъ симметрическую функцію n-го порядка.

Такъ при $n=2$
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$$

При $n=3$
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 + b_1c_2a_3 - b_1a_2c_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3.$$

Очевидно, также не трудно составить д-тъ и при всѣхъ одинаковыхъ буквахъ, напр:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію главныхъ свойствъ детерминантовъ, обусловливающихъ дѣйствія съ ними.

I. Детерминантъ не измѣнится по величинѣ и по знаку, если горизонтальныя его строки сдѣлать вертикальными и наоборотъ.

Это предложеніе почти очевидно само собою. Если для составленія каждаго члена детерминанта берется по одному элементу изъ каждой горизонтали и вертикали, стоящему на ихъ пересѣченіи, то, очевидно, горизонтальные и вертикальные столбцы совершенно равноправны, и безразлично назвать такъ или иначе тѣ или другіе. Впрочемъ, нетрудно это доказать и болѣе строго. Переставивъ, какъ указано, столбцы д-та, мы увидимъ, что теперь горизонтали различаются между собою вторыми индексами, а вертикали первыми (обратно первоначальному).

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\mathrm{II})$$

Если теперь припомнимъ, что для составленія каждаго члена д-та мы брали элементы, оставляя порядокъ вертикальныхъ столбцовъ, изъ которыхъ беремъ, всегда одинъ и тотъ же, первоначальный, — то очевидно, что при такомъ методѣ всѣ члены въ первомъ случаѣ расположатся по вторымъ индексамъ, и во второмъ случаѣ — по первымъ; слѣд., чтобы отъ членовъ второго д-та перейти къ членамъ перваго, надо въ нихъ только переставить элементы такъ, чтобы они рас-

положились по вторым индексам, а это не изменит абсолютной величины членов. Не изменится, также очевидно, и знаки членов. Возьмем два аналогичные члена (I) и (II) определителя: $a_{31} a_{n2} \dots a_{2p} \dots a_{1n}$ член (I) и $a_{1n} a_{2p} a_{31} \dots a_{n2}$ член (II). Если положим, что в первом члене мы от нормального порядка первых индексов перешли к данному путем m транспозиций, то, переходя ко второму члену, т.е. восстановляя нормальный порядок первых индексов, мы должны сделать тоже m транспозиций (обратных), при чем и вторые индексы (бывшие в нормальном порядке, подвергнутся тоже m транспозициям. Итак, переходя от первого члена ко второму, мы сделали m перестановок в первых индексах и столько же во вторых, т.е. всего $2m$ (четное число), а след., число инверсий останется по прежнему четным или нечетным (прибавка к нему $2m$ не изменит его в этом отношении), и знак члена не изменится. Таким образом наше предложение доказано.

II. Если мы переместим в детерминанте два вертикальных (или горизонтальных) столбца между собой, детерминант изменит свой знак.

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \dots & e_1 & \dots & k_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \dots & e_2 & \dots & k_2 & \dots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \dots & e_3 & \dots & k_3 & \dots & l_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n \dots & e_n & \dots & k_n & \dots & l_n \end{matrix}$$

Если столбец e переставим с k, то новый определитель $D' = -D$. В каждый член данного детерминанта входит один член столбца e и один член столбца k; когда мы совершим указанную перестановку, то во всех членах элементы e и k переместятся соответственно, и это одна перестановка

изменить знаки каждого члена, т.е. и всего определителя.

III. Если два вертикальных столбца в детерминанте равны между собой, тот детерминант равен нулю.

Это понятно прямо из предыдущего. Если переместить между собою эти два равных столбца, то Δ-т, очевидно, не изменится, но, с другой стороны, он переменит свой знак, т.е. будет равен самому себе с обратным знаком. И если $\Delta = -\Delta$, то $2\Delta = 0$ и $\Delta = 0$. Тоже, конечно, и при равенстве горизонтальных.

IV. Детерминант, в котором один столбец содержит элементы в виде сумм, разобьется на сумму двух детерминантов, отличных от первоначального лишь тем, что на месте столбца с суммами стоят соответственно слагаемые.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \dots l_1 + \varepsilon_1 \dots l_1 \\ a_2 & b_2 \dots l_2 + \varepsilon_2 \dots l_2 \\ a_3 & b_3 \dots l_3 + \varepsilon_3 \dots l_3 \\ \dots & \dots \\ a_n & b_n \dots l_n + \varepsilon_n \dots l_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \dots l_1 \dots l_1 \\ a_2 & b_2 \dots l_2 \dots l_2 \\ a_3 & b_3 \dots l_3 \dots l_3 \\ \dots & \dots \\ a_n & b_n \dots l_n \dots l_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \dots \varepsilon_1 \dots l_1 \\ a_2 & b_2 \dots \varepsilon_2 \dots l_2 \\ a_3 & b_3 \dots \varepsilon_3 \dots l_3 \\ \dots & \dots \\ a_n & b_n \dots \varepsilon_n \dots l_n \end{vmatrix}$$

Каждый член разложенного первоначального Δ-та содержит один элемент столбца $\varepsilon + \varepsilon$ множителем, след. разложен на сумму двух членов, различающихся только элементами a и ε. Все члены, выраженные такими образами, дадут две группы членов, составляющих, очевидно, два указанных Δ-та.

V. Если какой-нибудь столбец детерминанта содержит общий множитель, то его можно вынести за знак Δ-та.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ \mu a_{k1} & \mu a_{k2} & \mu a_{k3} \dots \mu a_{kn} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \dots a_{kn} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Это очевидно изъ того, что всѣ члены детерминанта входятъ элементы строки k, слѣд. и множитель μ; вынесши его за скобку получимъ д-тъ, въ которомъ эта строка не содержитъ множителя μ. Отсюда слѣдуетъ, что если въ какой-нибудь строкѣ детерминанта всѣ элементы нули, то и самъ д-тъ равенъ 0, такъ какъ нуль можно сдѣлать общимъ множителемъ.

VI. Детерминантъ не мѣняется, если къ элементамъ одного изъ его столбцовъ прибавить или вычесть соотвѣтственные элементы параллельныхъ ему столбцовъ, помноженные на произвольныя величины.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+\mu a_{11}-\nu a_{21} & a_{k2}+\mu a_{12}-\nu a_{22} & a_{k3}+\mu a_{13}-\nu a_{23} & \dots & a_{kn}+\mu a_{1n}-\nu a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

На основаніи теоремы (IV) мы можемъ данный детерминантъ разбить на сумму столькихъ детерминантовъ, сколько слагаемыхъ въ каждомъ элементѣ строки k; въ этихъ послѣднихъ на основаніи (V) теоремы можемъ множители μ, ν, и т.д. вынести за знакъ д-та, и на основаніи теоремы (III) заключаемъ, что всѣ слагаемыя, кромѣ перваго, обращаются въ нуль, ибо имѣютъ по двѣ равныхъ горизонтали.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{k1} & a_{k2} \dots a_{kn} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} 0 & & & \\ a_{12} \dots a_{1n} & & & \\ a_{22} \dots a_{2n} & & & \\ \dots\dots\dots & & & \\ a_{12} \dots a_{1n} & & & \\ \dots\dots\dots & & & \\ a_{n2} \dots a_{nn} & & & \end{vmatrix} - \nu \begin{vmatrix} 0 & & & \\ a_{12} \dots a_{1n} & & & \\ a_{22} \dots a_{2n} & & & \\ \dots\dots\dots & & & \\ a_{22} \dots a_{2n} & & & \\ \dots\dots\dots & & & \\ a_{n2} \dots a_{nn} & & & \end{vmatrix}$$

VII. Если въ какой-нибудь вертикальной строкѣ детерминанта всѣ элементы, кромѣ одного, нули, то такой д-тъ равенъ члену этой строки, не равному нулю, помноженному на д-тъ, получающійся изъ даннаго, если въ послѣднемъ вычеркнуть вертикаль съ нулями и тотъ горизонталь, въ которой находится не равный нулю элементъ.

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & 0 & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & 0 & \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots & & & \dots & \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} \dots & a_{lk} & \dots a_{ln} \\ \dots\dots\dots & & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots & 0 & \dots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{lk} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если представимъ себѣ нашъ д-тъ въ раскрытомъ видѣ, найдемъ, что всѣ члены его, не содержащіе a_{lk} — обращаются въ нуль, (такъ какъ они имѣютъ множителями 0 на основаніи правилъ составленія д-та). Тѣ необращающіеся въ нуль — a_{lk} вынесемъ за скобки и получимъ въ скобкахъ указанный детерминантъ. Ясно, что въ него будутъ входить всѣ элементы, кромѣ тѣхъ, что l, такъ какъ въ томъ членѣ, гдѣ есть a_{l_1}, a_{l_2}, и т.д., не можетъ уже быть a_{lk}, а такіе члены обращаются въ 0. (Новый д-тъ имѣетъ $(n-1)^2$ членовъ и носитъ названіе минора.)

VIII. Любой элементъ д-та можно перенести на первое мѣсто (на мѣсто a_{11}); при этомъ детерминантъ измѣ-

жается на $(-1)^{k+l}$, гдѣ k есть число, указывающее, въ какой отъ начала (по счету) горизонтальной строкѣ д-та находится этотъ элементъ, а l — въ какой вертикальной.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1l} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2l} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \boxed{a_{kl}} & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nl} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пусть имѣемъ такой д-тъ. Если мы горизонталь k въ немъ перемѣстимъ съ предшествующей $k-1$-ой горизонталью, д-тъ по теоремѣ (I) измѣнитъ свой знакъ, т.е. помножится на -1; перемѣщая ее съ слѣдующей и т.д., мы каждый разъ множимъ д-тъ на -1, такъ что, когда горизонталь k займетъ первое мѣсто, д-тъ помножится, очевидно, на $(-1)^{k-1}$; если теперь вертикаль l такимъ же образомъ будемъ перемѣщать постепенно на одно мѣсто влѣво, д-тъ каждый разъ будетъ мѣнять знакъ, и когда она займетъ мѣсто первой вертикали, д-тъ помножится на $(-1)^{l-1}$. Очевидно, послѣ этихъ дѣйствій элементъ a_{kl} станетъ на первое мѣсто, а д-тъ помножится на $(-1)^{k-1} \cdot (-1)^{l-1}$, т.е. на $(-1)^{k+l-2}$ или, что тоже, на $(-1)^{k+l}$.

Эта теорема даетъ намъ возможность опредѣлить знакъ минора въ предыдущей теоремѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если въ д-тѣ (1) членъ a_{lk}, неравный 0, перемѣстимъ на первое мѣсто, получимъ:

$$(-1)^{k+l} \begin{vmatrix} a_{lk} & a_{l1} & a_{l2} \dots & a_{ln} \\ 0 & a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{k+l} \cdot a_{lk} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2,l-1} & a_{2,l+1} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \dots & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Вычисление детерминантов.

При помощи выше приведенных формул мы можем всякий детерминант преобразить так, что понизим его порядок, и, постепенно понижая порядок, наконец вычислим его. Сделаем это сначала в общем виде, а потом на частном примере. Возьмем такой д-ть 4го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Первую горизонталь его положим на $a_2 a_3 a_4$, вторую на $a_1 a_3 a_4$, третью на $a_1 a_2 a_4$ и четвертую на $a_1 a_2 a_3$; тогда д-ть сам положится на все эти четыре величины, и, чтобы величина его не изменилась, мы разделим его на произведение этих величин; тогда D примет вид:

$$\frac{1}{a_2 a_3 a_4} \cdot \frac{1}{a_1 a_3 a_4} \cdot \frac{1}{a_1 a_2 a_4} \cdot \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \cdot \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ a_2 a_1 a_3 a_4 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ a_3 a_1 a_2 a_4 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ a_4 a_1 a_2 a_3 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix}$$

(Через β, γ, δ обозначили получившиеся произведения). По теор. (V) мы можем из первой вертикали вынести за знак д-та общий множитель $a_1 a_2 a_3 a_4$.

D'т примет такой вид (по сокращении множителей)

$$\frac{1}{(a_1 a_2 a_3 a_4)^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ 1 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ 1 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ 1 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix}$$

Теперь вычтем, положим, 1ую горизонталь поочередно из $2^{\text{ой}}$, $3^{\text{ей}}$ и $4^{\text{ой}}$, что мы можем сделать на основании теор. (VI),

не мѣняя величины д-та; получимъ:

$$\frac{1}{(a_1a_2a_3a_4)^2}\begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ 0 & \beta_5-\beta_1 & \gamma_2-\gamma_1 & \delta_2-\delta_1 \\ 0 & \beta_3-\beta_1 & \gamma_3-\gamma_1 & \delta_3-\delta_1 \\ 0 & \beta_4-\beta_1 & \gamma_4-\gamma_1 & \delta_4-\delta_1 \end{vmatrix} \text{ а это по теор. } (\overline{VII}) = \frac{1}{(a_1a_2a_3a_4)^2}\cdot\begin{vmatrix} \beta_2-\beta_1 & \gamma_2-\gamma_1 & \delta_2-\delta_1 \\ \beta_3-\beta_1 & \gamma_3-\gamma_1 & \delta_3-\delta_1 \\ \beta_4-\beta_1 & \gamma_4-\gamma_1 & \delta_4-\delta_1 \end{vmatrix}$$

Мы получили въ результатѣ д-тъ 3-го порядка, т.е. низшаго; поступая также съ нимъ, понизимъ еще его порядокъ и, въ концѣ концовъ, вычислимъ. Сдѣлаемъ это на числовомъ примѣрѣ. Возьмемъ детерминантъ.

$$4.2.3.\begin{vmatrix} \cancel{16}^{24} & \cancel{36}^{9\,3} & \cancel{40}^{10} & \cancel{24}^{6} & \cancel{12}^{3} \\ 48 & 12^{4} & 5 & 0 & 3 \\ 12 & 3^{1} & 6 & 4 & 1 \\ 36 & 9^{3} & 2 & 3 & 0 \\ 24 & 12^{4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{A} = 4.2.3\begin{vmatrix} -4 & -9 & 10 & 6 & 3 \\ -2 & -8 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 6 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{B} = 4.2.3\begin{vmatrix} -4 & -9 & 10 & 6 \\ -2 & -8 & 5 & 0 \\ -1 & -3 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{C} =$$

$$= 24\begin{vmatrix} -4 & -5 & 10 & 10 \\ -2 & -6 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}_{D} = -24\begin{vmatrix} -14 & 5 & 38 & 10 \\ -7 & 6 & 19 & 2 \\ -7 & 2 & 20 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{E} = +24\begin{vmatrix} +5 & 38 & 10 \\ +6 & 19 & 2 \\ +2 & 20 & 5 \end{vmatrix}_{F} =$$

$$= 24\begin{vmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 6 & 19 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}_{G} = 24\begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 8 & 19 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}_{H} = 24\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 19 & 50 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}_{K} = -1.24.\begin{vmatrix} 19 & 50 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}_{L} =$$

$$= -24\left[-57-50\right] = 2568.$$

Скажемъ нѣсколько словъ по поводу приведеннаго вычисленія. Въ A первую горизонталь сокращаемъ на 4, первую и вторую вертикаль на 2 и на 3; 4, 2 и 3 выносимъ за знакъ д-та; послѣднюю вертикаль удвоенную вычитаемъ изъ первой, а учетверенную изъ второй, — получаемъ B. По теор. $(\overline{VII})$ отсюда получаемъ C; знакъ по теор. $(\overline{VIII})$ не мѣняется.

Здѣсь 1-ю вертикаль вычитаемъ изъ 2-й и 4-й — получимъ D. Въ нихъ изъ 1-й вер. вычитаемъ 3-ю, а изъ утроенной 3-й удвоенную первую, получаемъ E, при чемъ во 2-й верт. выносимъ −1. Отсюда по теор. (VII) и (VIII) получаемъ F. Въ F изъ 1-й горизонтали вычитаемъ удвоенную 2-ю и ее же вычитаемъ изъ 3-й горизонтали; получ. G, въ которомъ 3-ю вертикаль прибавляемъ къ первой. Въ H учетверенную первую вертикаль прибавляемъ къ 3-й, получаемъ K. Кончивъ вычисленіе, найдемъ что D = 2568.

Разложеніе д-та на миноры.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Возьмемъ общій видъ д-та и представимъ его себѣ въ раскрытомъ видѣ. Каждый членъ раскрытаго д-та будетъ непремѣнно содержать одинъ какой-либо, и только одинъ, элементъ строки k. Разобьемъ всѣ члены на n такихъ группъ, чтобы въ 1-й у всѣхъ членовъ былъ множитель a_{k1}, во второй — a_{k2} и т.д.; если теперь всѣ эти общіе множители вынесемъ за скобки, то въ каждой группѣ въ скобкахъ получится д-тъ, не содержащій элементовъ горизонтали k и не содержащій элементовъ той вертикали, въ которой стоитъ элементъ, вынесенный за скобки. Это ясно изъ самаго правила составленія д-та. Всѣ эти полученные въ скобкахъ д-ты носятъ названіе миноровъ тѣхъ элементовъ, которые стоятъ у нихъ за скобками. Очевидно, чтобы получить миноръ элемента a_{kl}, надо вычеркнуть изъ даннаго д-та горизонталь k и вертикаль l; миноръ этотъ, (какъ и всѣ прочіе),

обозначается, обыкновенно, буквой A съ индексами элемента, къ которому онъ относится, т. е. A_{kl}. Вопросъ о знакѣ минора не представляетъ затрудненія, такъ какъ мы знаемъ, что A_{11} – миноръ a_{11} – всегда положительный и знаемъ, что каждый элементъ a_{kl} (напр. (VIII)) можно перенести на мѣсто a_{11}, помноживъ при этомъ опр-ль на $(-1)^{k+l}$. Но въ нашемъ обозначеніи знакъ не будетъ играть существенной роли, и мы будемъ подразумѣвать его въ самомъ обозначеніи A, т. е. подъ A_{kl} разумѣемъ миноръ элемента a_{kl} уже съ его знакомъ. Условившись въ обозначеніяхъ, мы можемъ теперь наше раскрытіе опр-ля представить въ такомъ видѣ:

$$\Delta \equiv a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + a_{k3}A_{k3} + \ldots\ldots + a_{kl}A_{kl} + \ldots\ldots + a_{kn}A_{kn} \quad (1)$$

Въ такомъ видѣ (опр-ль) Δ носитъ названіе *опр-ля, разложеннаго по элементамъ горизонтали k*. Въ виду полной равноправности всѣхъ горизонталей и вертикалей мы можемъ Δ разложить по элементамъ любой изъ нихъ, напр:

$$\Delta \equiv a_{1l}A_{1l} + a_{2l}A_{2l} + \ldots\ldots + a_{kl}A_{kl} + \ldots\ldots + a_{nl}A_{nl} \quad (2)$$

Очевидно, разложеній въ опр-ль возможно $2n$, если онъ n-го порядка. Важно замѣтить одно простое свойство этихъ разложеній. Если мы, положимъ, въ разложеніи (1) оставимъ безъ измѣненія миноры, но помножимъ ихъ на какія-нибудь новыя количества α, β, γ, и т. д., то Δ, конечно, измѣнится величину на Δ', при чемъ въ новомъ, вмѣсто элементовъ строки k будутъ стоять α, β, γ, и т. д.

$$\alpha A_{k1} + \beta A_{k2} + \gamma A_{k3} + \ldots\ldots + \lambda A_{kl} + \ldots\ldots + \nu A_{kn} \equiv \Delta' \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha & \beta & \gamma & \ldots & \nu \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Если подъ $\alpha, \beta, \gamma \ldots \nu$ будемъ послѣдовательно разумѣть элементы какой-нибудь другой горизонтали, то Δ' сдѣлается равнымъ 0, такъ какъ у него явятся двѣ равныхъ горизонтали. (Теор. III). Напримѣръ:

$$a_{11} A_{k1} + a_{12} A_{k2} + \ldots + a_{1l} A_{kl} + \ldots + a_{1n} A_{kn} = 0 \quad (A)$$

$$a_{21} A_{k1} + a_{22} A_{k2} + \ldots + a_{2l} A_{kl} + \ldots + a_{2n} A_{kn} = 0 \quad (B)$$

Миноры, о которыхъ мы говорили — $n-1$'го порядка, получаются отъ вычеркиванія въ д-тѣ одной горизонтали и одной вертикали и называются первыми минорами. Опредѣленіе это распространяютъ и дальше; если будемъ зачеркивать по двѣ вертикали и горизонтали, получится рядъ д-товъ $\underline{n-2}$ порядка, первые носятъ названіе вторыхъ миноровъ и т. д. Если каждый изъ первыхъ миноровъ соотвѣтствуетъ элементу, лежащему на пересѣченіи двухъ вычеркнутыхъ строкъ, то по аналогіи заключаемъ, что вторые, третьи и т. д. миноры соотвѣтствуютъ д-тамъ изъ элементовъ, лежащихъ на пересѣченіи вычеркнутыхъ строкъ.

Повышеніе порядка д-та и умноженіе д-товъ.

Если имѣемъ д-тъ, положимъ, n'аго порядка, то всегда можемъ обратить его въ д-тъ $n+1$'го порядка; нужно только приписать къ вершинѣ его 1, одну изъ прибавляемыхъ строкъ заполнить нулями (положимъ, горизонталь), а другую — произвольными количествами, ибо очевидно, что:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \alpha & a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ \beta & a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu & a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Перейдем теперь к умножению д-тов, при чем заметим, что всегда можно полагать, что перемножаемые д-ты – одного порядка (на основании только что сказанного). Перемножать д-тов в раскрытом виде, в виду алгебраических вычислений, при большом количестве членов в высшей степени неудобно; поэтому их перемножают, не раскрывая.

Рассмотрим два способа такого перемножения.

I. Пусть надо перемножить два таких д-та:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \Delta$$

A priori скажем, что произведение их $\Delta . D =$

$$\Delta . D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & p_1 & q_1 \\ a_{21} & a_{22} & p_2 & q_2 \\ 0 & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

Причем p_1, q_1, p_2 и q_2 – произвольные количества. Действительно, вычеркнув, напр., a_{11}, a_{12}, p_1, q_1 и a_{21}, a_{22}, p_2, q_2, мы получим произведение двух д-тов, из которых первый имеет α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22}, а второй α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22}. Разложим полученный д-тов по элементам 1-го вертикали. Тогда:

$$\Delta . D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & p_2 & q_2 \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & p_1 & q_1 \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \cdot =$$

$$= a_{11} a_{22} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} - a_{21} a_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

Этот способ удобен тем, что порядок полученного д-та вдвое больше порядка перемножаемых, а потому малоупотребителен.

II Во бѣдьмнемъ случаѣ употребляютъ вмѣсто сего способъ, при которомъ порядокъ не повышается. Возмемъ тожде-ства Δ и Δ и составимъ изъ нихъ новый по такому правилу: помножимъ горизонтали перваго соотвѣтственно на первую и на вторую горизонталь втораго и сложимъ попарно полученныя произведенія; изъ этихъ суммъ состав-имъ новый детерминантъ втораго порядка, который, какъ увидимъ изъ поверки, и будетъ произведеніе данныхъ. Дѣйствительно:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}+a_{12}\alpha_{12} & , & (a_{11}\alpha_{11}+a_{12}\alpha_{12}) \\ a_{21} & a_{11}+a_{22}\alpha_{12} & , & (a_{21}\alpha_{11}+a_{22}\alpha_{12}) \end{vmatrix} = (\text{по теор. IV}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha_{11} & , & u \\ a_{21} & \alpha_{11} & , & v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & \alpha_{12} & , & u \\ a_{22} & \alpha_{12} & , & v \end{vmatrix} = (\text{по теор. V}) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & , & a_{11}\alpha_{21}+a_{12}\alpha_{12} \\ a_{21} & , & a_{21}\alpha_{21}+a_{22}\alpha_{12} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & , & a_{11}\alpha_{21}+a_{12}\alpha_{22} \\ a_{22} & , & a_{21}\alpha_{21}+a_{22}\alpha_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= (\text{теор. IV и I}) = \alpha_{11}\alpha_{21}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix}^{0} + \alpha_{11}\alpha_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \alpha_{12}\alpha_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} +$$

$$+ \alpha_{12}\alpha_{22}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}^{0} = (\text{есть перемѣстимъ во второмъ вертикали и, слѣдовательно перемѣнимъ знакъ}) =$$

$$= (\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})\cdot \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} = \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

Очевидно, подобное произведеніе можно составить четырь-мя способами: (1) множа горизонтали перваго на горизон-тали втораго, (2) горизонтали перваго на вертикали

Всякій многочленъ, будь онъ полный или неполный, мы можемъ расположить по нисходящимъ степенямъ какой будь одной буквы, напр. x'а:

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_kx^{n-k} + \dots + A_{n-1}x + A_n \dots$$

При этомъ другіе неизвѣстные будутъ входить въ коэффиц[illegible]ты, такъ что A_1 будетъ полный и неполный многочленъ не[illegible] степени относительно остальныхъ неизвѣстныхъ, A_2 — втор[illegible] степени и т.д. (это вполнѣ понятно)

Разберемъ теперь нѣкоторыя общія свойства этого мно[illegible]гочлена (a).

Въ курсѣ „Высшей алгебры" доказывается, что всякій [illegible]лый многочленъ всегда имѣетъ хотя одинъ (дѣйствител[illegible] или мнимый) корень, т.е. всегда для x'а найдется велич[illegible] обращающая весь многочленъ въ 0 (такія величины и назыв[illegible]ся корнями). Принявъ это во вниманіе докажемъ тану[illegible] ѳрему.

Теорема. Всякій цѣлый многочленъ n'ой степени [illegible]етъ всегда n (и только n) дѣйствительныхъ или мним[illegible] корней.

Назовемъ нашъ многочленъ черезъ $f(x)$ и раздѣлимъ на $x-x_1$, гдѣ x_1 есть корень многочлена (а онъ непрем[illegible]но существуетъ); положимъ, получимъ въ частномъ f который будетъ $n-1$ степени и въ остаткѣ R. Но R обходимо будетъ 0, потомучто если въ тождество

$$f(x) \equiv f_1(x)\cdot(x-x_1)+R$$

подставимъ вмѣсто x величину x', получимъ

$$f(x_1) \equiv 0\cdot f_1(x)+R$$

а $f(x_1)=0$, слѣдовательно

$$R=0$$

Итакъ многочленъ раздѣлится на $x-x_1$ безъ остатка:

$$f(x) = (x-x_1)\,f_1(x)$$

Высшая алгебра Ямск[illegible]

Отд. Распр. Лекц. Ямск.

Новый многочленъ $f_1(x)$ степени $n-1$ тоже имѣетъ корень, полож., x_2 и, слѣд., раздѣлится безъ остатка на $x-x_2$; въ частномъ — многочленъ степени $n-2$; продолжая послѣдовательно такое дѣленіе, получимъ наконецъ въ частномъ многочленъ нулевой степени, т.е. не содержащій x'а; это, очевидно будетъ коэффиціентъ старшаго члена A_0, который остается неизмѣннымъ при всѣхъ дѣленіяхъ. Итакъ:

$$f(x) = (x-x_1)\, f_1(x)$$
$$f_1(x) = (x-x_2)\, f_2(x)$$
$$f_2(x) = (x-x_3)\, f_3(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{n-2}(x) = (x-x_{n-1})\, f_{n-1}(x)$$
$$f_{n-1}(x) = (x-x_n)\, A_0$$

Перемножая обѣ части, имѣемъ:

$$f(x) \equiv A_0\,(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)$$

Итакъ, всякій цѣлый многочленъ можно представить въ видѣ такого произведенія. Очевидно, что всякій разъ, какъ мы x'у дадимъ значеніе или x_1, или x_2 и т.д., $f(x)$ обращается въ нуль, т.е. $x_1, x_2 \ldots x_n$ и есть корни нашего многочлена. Число ихъ — n и больше быть не можетъ, такъ какъ если бы α было еще новымъ корнемъ, $f(x)$ дѣлилось бы на $x-\alpha$, и этотъ множитель вмѣстѣ съ тѣмъ далъ бы уже многочленъ $n+1$'ой степени.

Результанты.

Мы видѣли, что если даны n линейныхъ [неоднородныхъ] уравненій съ $n-1$ неизвѣстныхъ, то условіемъ согласія ихъ служитъ равенство нулю д'та изъ коэффиціентовъ системы. Этотъ д'тъ носитъ названіе результанта, но это только частный

случай результанта. Если даны n не линейных, а вообще какой-нибудь степени уравнений съ n−1 неизвѣстными, то всегда можно неизвѣстные исключить (найти неизвѣ изъ n−1 какихъ-нибудь уравненій и подставить въ n^ое) и результатомъ этого исключенія будетъ уравненіе R=0 гдѣ R состоитъ только изъ коэффиціентовъ данныхъ у неній. Эта-то первая часть ур. R и носитъ вообще названіе результанта. Равенство результанта нулю есть условіе согласія системы.

Итакъ нахожденіе результанта сводится къ исключен (n−1) неизвѣстныхъ изъ системы n неоднородныхъ уравненій или, что тоже, какъ мы видѣли раньше, n неизвѣстныхъ из n однородныхъ уравненій. Чтобы рѣшеніе этого вопрос достаточно умѣть исключить одно неизвѣстное изъ сис темы двухъ уравненій. Этимъ вопросомъ мы и займемся.

Посмотримъ, когда система такихъ уравненій:

$$f(x) \equiv A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_kx^{n-k} + \dots + A_{n-1}x + A_n = 0$$

и $$\varphi(x) \equiv B_0x^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_\ell x^{m-\ell} + \dots + B_{m-1}x + B_m = 0$$

будетъ совмѣстна, т.е. когда есть для x'а хотя одна ве личина, обращающая въ 0 одновременно оба многочлена $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Положимъ корни перваго многочлена $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ и корни второго: $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \xi_m$

Если подставимъ всѣ корни второго поочереди въ первое уравненіе и всѣ корни перваго во второе, и перемножимъ ихъ, то очевидно что

$$\mathcal{F} \equiv f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) \dots f(\xi_m) = 0 \qquad (a)$$

$$\Phi \equiv \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) = 0 \qquad (b)$$

такъ какъ мы требуемъ, чтобы хотя одно ξ удовлетворял 1^ому уравненію и хотя одно x удовлетворяло второму, т.е. одинъ изъ f и одинъ изъ φ непремѣнно обратятся въ нуль.

Любого изъ этихъ условій достаточно для согласія системы, т.е. и P и Q есть результанты, но они, какъ мы сейчасъ увидимъ, отличаются одинъ отъ другого только постоянными множителями и могутъ отличаться знакомъ, но это не дѣлаетъ между ними разницы, когда они равны нулю. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что

$$f(x) \equiv A_0 (x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n)$$

и

$$\varphi(x) \equiv B_0 (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots\ldots(x-\xi_m)$$

Подставляя въ первое выраженіе поочереди корни второго и наоборотъ, получимъ:

$$P \equiv A_0(\xi_1-x_1)(\xi_1-x_2)\ldots(\xi_1-x_n).\,A_0(\xi_2-x_1)(\xi_2-x_2)\ldots(\xi_2-x_n)\ldots\ldots$$
$$\ldots A_0(\xi_m-x_1)(\xi_m-x_2)\ldots(\xi_m-x_n)$$

$$Q \equiv B_0(x_1-\xi_1)(x_1-\xi_2)\ldots(x_1-\xi_m).\,B_0(x_2-\xi_1)(x_2-\xi_2)\ldots(x_2-\xi_m)\ldots\ldots$$
$$\ldots B_0(x_n-\xi_1)(x_n-\xi_2)\ldots(x_n-\xi_m)$$

Если всмотримся въ эти два выраженія, то увидимъ, что у P есть постоянный коэффиціентъ A_0^m, а у Q — B_0^n, число двучленныхъ множителей у нихъ одинаково — mn, и сами множители одинаковы, но въ Q — всѣ эти множители входятъ со знаками, обратными тѣмъ, которые при нихъ стоятъ въ P; т.е.

$$\frac{P}{Q} = \frac{A_0^m}{(-1)^{mn} B_0^n} \quad \text{или} \quad A_0^m Q = (-1)^{mn} B_0^n P$$

Понятно, что представить результантъ въ видѣ многочленовъ P или Q не всегда возможно, такъ какъ не всегда мы можемъ знать корни данныхъ уравненій, а потому есть нѣсколько другихъ способовъ вычисленія результанта, которыми мы и займемся.

Нахожденіе результанта по способу Сильвестра.

Возьмемъ опять два уравненія:

$$f(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_k x^{m-k} + \dots + a_m = 0 \quad (n-1) \quad (a)$$

$$\varphi(x) \equiv b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_l x^{n-l} + \dots + b_n = 0 \quad (m-1) \quad (b)$$

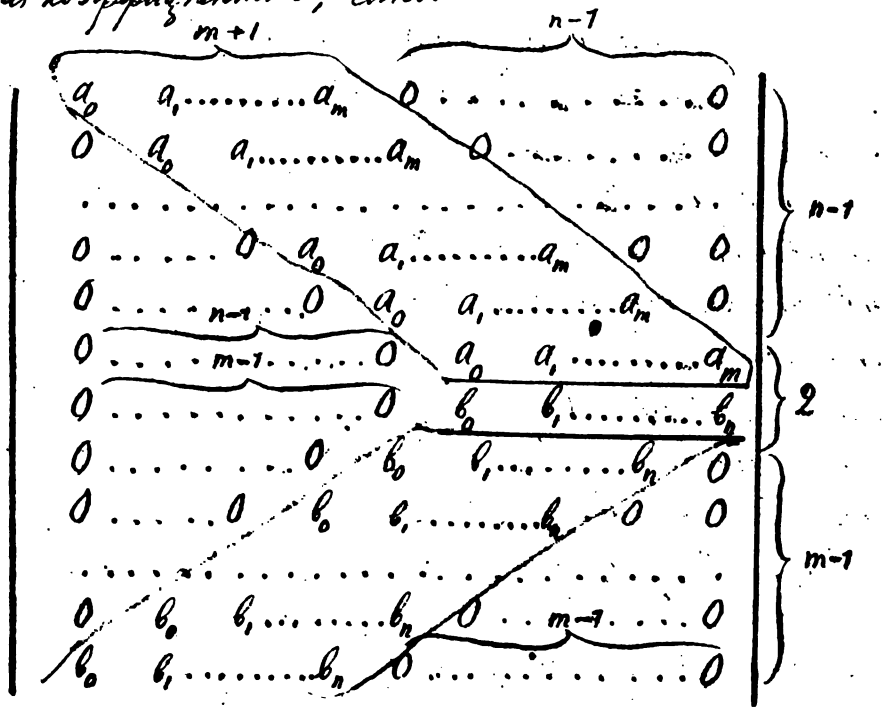
причемъ положимъ, для общности, что многочлены однородны, т.е. a_0 и b_0 есть отвлеченныя количества, a_1 и b_1 — однородные многочлены 1-ой степени относительно остальныхъ неизвѣстныхъ $(y, z, t \dots)$, a_2 и b_2 — многочлены 2-ой степени и т.д. Требуемъ, чтобы система была согласна, т.е. чтобы уравненія имѣли хоть одинъ общій корень. Для нахожденія условія этого, т.е. результанта, составимъ изъ перваго $n-1$ новыхъ уравненій, помножая (a) поочереди на $x, x^2, x^3 \dots x^{n-1}$, а изъ второго $m-1$ новыхъ уравненій, помножая на $x, x^2 \dots x^{m-1}$. Тогда получимъ такую систему изъ $m+n$ уравненій $[(m-1)+(n-1)+2 = m+n]$

$$(\mathrm{I}) \quad \left|\begin{array}{l}
a_0 x^{m+n-1} + a_1 x^{m+n-2} + \dots + a_m x^{n-1} = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_0 x^{m+2} + a_1 x^{m+1} + \dots + a_m x^2 = 0 \\
a_0 x^{m+1} + a_1 x^m + \dots + a_m x = 0 \\
a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = 0 \\
\hline
b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n = 0 \\
\hline
b_0 x^{n+1} + b_1 x^n + \dots + b_n x = 0 \\
b_0 x^{n+2} + b_1 x^{n+1} + \dots + b_n x^2 = 0 \\
\dots \\
b_0 x^{m+n-1} + b_1 x^{m+n-2} + \dots + b_n x^{m-1} = 0
\end{array}\right.$$

Примемъ всѣ степени x'а за отдѣльныя неизвѣстныя. Мы видимъ, что уравненій въ системѣ $m+n$, а неизвѣстныхъ $m+n-1$, т.е. система условна, и съ другой стороны видимъ, что условіе согласія нашихъ двухъ уравненій и условіе согласія всей системы — одно и тоже; такъ какъ при согласіи данныхъ двухъ, система необходимо согласна. Условіе согласія системы есть равенство нулю

д'та изъ ея коэффиціентовъ; слѣд.

$$
R \equiv \begin{array}{c}
\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{m+1}\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{n-1} \\
\left|\begin{array}{cccccccc}
a_0 & a_1 \ldots\ldots a_m & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 \ldots\ldots a_m & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & 0 & a_0 & a_1 \ldots\ldots a_m & 0 & & 0 \\
0 & \ldots & \overbrace{\ldots}^{n-1} & 0 & a_0 & a_1 \ldots\ldots a_m & & 0 \\
0 & \ldots & \overbrace{\ldots}^{m-1} & \ldots & 0 & a_0 & a_1 \ldots\ldots & a_m \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & b_0 & b_1 \ldots\ldots & b_n \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & b_0 & b_1 \ldots\ldots & b_n & 0 \\
0 & \ldots & 0 & b_0 & b_1 \ldots\ldots & b_n & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & b_0 & b_1 \ldots\ldots & b_n & 0 & \ldots & \overbrace{\ldots}^{m-1} & 0 \\
b_0 & b_1 \ldots\ldots & b_n & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0
\end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} n-1 \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} 2 \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} m-1
\end{array}
$$



Очевидно, этотъ детерминантъ $(m+n)$'го порядка. Это и есть результантъ нашихъ двухъ уравненій.

R въ раскрытомъ видѣ представитъ собою многочленъ относительно всѣхъ остальныхъ неизвѣстныхъ (закл. a, b_1, b_2, a_2). Посмотримъ, какова будетъ степень этого многочлена.

<u>Теорема Безу.</u> <u>Если изъ двухъ уравненій m'ой и n'ой степени исключимъ одно неизвѣстное, въ результатѣ получится д'тъ (результантъ), который въ раскрытомъ видѣ есть однородный многочленъ степени $m.n$.</u>

Замѣнимъ въ элементахъ результанта всѣ $y, z \ldots$ чрезъ $\lambda y, \lambda z \ldots$ и т. д., гдѣ λ постоянное количество; тогда, по свойству однородныхъ многочленовъ, въ коэффиціентахъ a и b — λ вынесется за скобки въ той степени, какой самъ коэффиціентъ (и каковъ у насъ его индексъ). Тогда результантъ приметъ такой видъ:

$$R' \equiv \begin{vmatrix} a_0 & \lambda a_1 & \lambda^2 a_2 & \dots & \lambda^m a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \lambda a_1 & \lambda^2 a_2 & \dots & \lambda^m a_m & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \lambda a_1 & \lambda^2 a_2 & \dots & \lambda^m a_m & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & \lambda a_1 & \lambda^2 a_2 & \dots & \lambda^m a_m \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & \lambda b_1 & \lambda^2 b_2 & \dots & \lambda^n b^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b_0 & \lambda b_1 & \lambda^2 b_2 & \dots & \lambda^n b^n & 0 \\ 0 & b_0 & \lambda b_1 & \lambda^2 b_2 & \dots & \lambda^n b^n & 0 & \dots \\ b_0 & \lambda b_1 & \lambda^2 b_2 & \dots & \lambda^n b^n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \lambda^{m-1} \\ \lambda^{m-2} \\ \\ \lambda^2 \\ \lambda \\ \end{matrix}$$

Легко видеть, что если мы всю вторую сверху горизонталь помножим на λ, третью на λ^2, и т. д. n-ю на λ^{n-1}, затем всю вторую снизу на λ, третью снизу на λ^2, и т. д. m-ю на λ^{m-1}, то, с одной стороны, R' помножится на $\lambda . \lambda^2 . \dots . \lambda^{n-1} . \lambda . \lambda^2 . \dots . \lambda^{m-1}$, а с другой стороны все элементы вертикалей Δ-та будут иметь множителем λ в одной и той же степени: вторая слева вертикаль будет иметь множитель λ, третья λ^2, последняя — λ^{m+n-1}. Если теперь все эти множители вынесем за знак Δ-та, то сколько получим, очевидно, наш первоначальный результант — R, т. е.

$$\frac{\lambda . \lambda^2 . \lambda^3 . \dots . \lambda^{n-1} . \lambda . \lambda^2 . \dots . \lambda^{m-1}}{\lambda^{1+2+3+\dots+(n-1)+1+2+3+\dots+(m-1)}} . R' \equiv \lambda . \lambda^2 . \dots . \lambda^{m+n-1} . R$$

или

$$\lambda^{1+2+3+\dots+(m+n-1)} . R' \equiv \lambda^{1+2+3+\dots+(m+n-1)} . R$$

Отсюда имеем

$$\lambda^{\frac{m(n-1)+n(m-1)}{2}} . R' \equiv \lambda^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}} . R$$

или

$$R' \equiv \lambda^{\frac{(m+n)(m+n-1)-n(n-1)-m(m-1)}{2}} R \equiv \lambda^{\frac{m(m-1)+mn+n^2-n-m(m-1)-n^2+n}{2}} . R$$

$$R' \equiv \lambda^{mn} R$$

А это и значит, что R есть однородный многочлен Δ-та mn.

Способъ Сильвестра даетъ возможность не только найти результантъ, но и опредѣлить общій общій наибольшій корень и всѣ его степени, разумѣется, если система согласна, т.е. $R=0$. Тогда изъ любыхъ $m+n$ уравненій съ $m+n-1$ неизвѣстными (неизвѣстными считаемъ $x, x^2, \ldots\ldots x^{m+n-1}$) выкидываемъ одно какое-нибудь уравненіе и изъ оставшихся рѣшимъ $m+n-1$ уравненій съ $m+n-1$ неизвѣстными. Возьмемъ какой-нибудь примѣръ.

Примѣръ: Найти результантъ и величину общаго корня двухъ уравненій

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0 \quad (n) \qquad \text{и} \qquad b_0x^2+b_1x+b_2=0 \quad (m)$$

По способу Сильвестра

$$R \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \} m-1 \\ \\ \} 2 \\ \} n-1 \end{matrix}$$

Если $R=0$, и система согласна, можемъ взять для рѣшенія, положимъ, такую систему (отбросивъ одно ур.)

$$\begin{aligned} \underline{0} + \underline{a_0}x^2 + \underline{a_1}x + a_2 &= 0 \\ \underline{0} + \underline{b_0}x^2 + \underline{b_1}x + b_2 &= 0 \\ \underline{b_2}x^3 + \underline{b_1}x^2 + \underline{b_2}x + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Рѣшивъ ее, получимъ:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_0 - a_2 \\ 0 & b_0 - b_2 \\ b_0 & b_1 \quad 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \underline{0} & a_0 & a_1 \\ \underline{0} & b_0 & b_1 \\ \underline{b_0} & b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}}$$

Способъ Эйлера.

Положимъ, мы имѣемъ два такихъ уравненія:

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$
$$b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

Если эти уравненія имѣютъ общій корень ξ, то каждое изъ нихъ дѣлится безъ остатка на $x-\xi$ и въ частныхъ получаются многочлены степени, на единицу низшей, т.е.

$$x-\xi \equiv \frac{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3}{Px^2+Qx+R} \quad \text{и} \quad x-\xi \equiv \frac{b_0x^2+b_1x+b_2}{Mx+N}$$

Приравнявъ эти полученныя дроби и взявъ произведеніе крайнихъ и среднихъ, найдемъ:

$$(a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)(Mx+N) \equiv (b_0x^2+b_1x+b_2)(Px^2+Qx+R)$$

или

$$Ma_0x^4+(Ma_1+Na_0)x^3+(Ma_2+Na_1)x^2+(Ma_3+Na_2)x+Na_3 \equiv$$

$$\equiv Pb_0x^4+(Qb_0+Pb_1)x^3+(Rb_0+Qb_1+Pb_2)x^2+(Rb_1+Qb_2)x+Rb_2$$

Такъ какъ многочлены эти тождественно равны, то и коэффиціенты ихъ также равны, т.е. (перенося все въ лѣвую часть)

$$\begin{aligned}
a_0M+0-b_0P-0-0&=0\\
a_1M+a_0N-b_1P-b_0Q-0&=0\\
a_2M+a_1N-b_2P-b_1Q-b_0R&=0\\
a_3M+a_2N-0-b_2Q-b_1R&=0\\
0+a_3N-0-0-b_2R&=0
\end{aligned}$$

Мы получили пять однородныхъ уравненій относительно 5 неизвѣстныхъ $M, N, -P, -Q$ и $-R$. Исключая эти неизвѣстныя, получимъ нѣкоторый результантъ, приравненный нулю. (Допустивъ въ уравненіяхъ общій корень, мы и должны были получить условіе этого.)

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & b_0 \\ a_3 & a_2 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Способъ Безу или Коши

Имѣемъ два уравненія, полныхъ, 3-ей степени:

b_0 | $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ (1)

a_0 | $b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0$ (2)

Исключимъ изъ этихъ двухъ уравненій x^3, т.е. помножимъ первое на b_0, второе на a_0 и вычтемъ одно изъ другого:

$$(a_1b_0 - b_1a_0)x^2 + (a_2b_0 - b_2a_0)x + (a_3b_0 - b_3a_0) = 0$$

или, если обозначимъ вообще:

$$(a_1b_0 - b_1a_0) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_0 & b_0 \end{vmatrix} = (a_1b_0),$$ то имѣемъ:

$$(a_1b_0)x^2 + (a_2b_0)x + (a_3b_0) = 0 \qquad (a)$$

Взявъ у первыхъ двухъ членовъ (1) и (2) уравненій за скобки x^2 и исключивъ изъ нихъ эти x^2, придерживаясь такого же обозначенія:

$$\begin{array}{l|l} (a_0x + a_1)x^2 + a_2x + a_3 = 0 & (b_0x + b_1) \\ (b_0x + b_1)x^2 + b_2x + b_3 = 0 & (a_0x + a_1) \end{array}$$

Получ. $$(a_2b_0 - b_2a_0)x^2 + \left[(a_2b_1 + a_3b_0) - (b_2a_1 + b_3a_0)\right]x + (a_3b_1 - b_3a_1) = 0$$

или $$(a_2b_0)x^2 + \left|(a_2b_1) + (a_3b_0)\right|x + (a_3b_1) = 0 \qquad (b)$$

Возьмемъ теперь за скобки x въ первыхъ трехъ членахъ (1) и (2) уравн. и исключимъ его:

$$(a_0x^2 + a_1x + a_2)x + a_3 = 0 \quad \Big| \quad (b_0x^2 + b_1x + b_2)$$
$$(b_0x^2 + b_1x + b_2)x + b_3 = 0 \quad \Big| \quad (a_0x^2 + a_1x + a_2)$$

Имѣемъ: $(a_3b_0 - b_3a_0)x^2 + (a_3b_1 - b_3a_1)x + (a_3b_2 - b_3a_2) = 0$

или $$(a_3b_0)x^2 + (a_3b_1)x + (a_3b_2) = 0 \qquad (c)$$

Три полученныя такимъ образомъ уравненія, должны быть согласны, если согласны (1) и (2), т.е. детъ изъ ихъ коэффиціентовъ долженъ равняться нулю.

$$(a_1b_0)x^2 + (a_2b_0)x + (a_3b_0) = 0 \qquad (a)$$
$$(a_2b_0)x^2 + [(a_2b_1) + (a_3b_0)]x + (a_3b_1) = 0 \qquad (b)$$
$$(a_3b_0)x^2 + (a_3b_1)x + (a_3b_2) = 0 \qquad (c)$$

$$R \equiv \begin{vmatrix} (a_1b_0) & (a_2b_0) & (a_3b_0) \\ (a_2b_0) & (a_2b_1)+(a_3b_0) & (a_3b_1) \\ (a_3b_0) & (a_3b_1) & (a_3b_2) \end{vmatrix} = 0$$

Результантъ этотъ, какъ видимъ, есть симметричный детерминантъ.

Исключеніе радикаловъ изъ ирраціональныхъ уравненій.

Если первая часть какого-нибудь уравненія есть функція ирраціональная, и всегда можно привести къ раціональному виду, т.е. освободиться отъ радикаловъ. Пусть въ уравненіи

$$f(x, y, \ldots, t) = 0$$

первая часть ирраціональна. Тогда мы обозначимъ всѣ

радикалы въ этой функціи каждый своей отдѣльной буквой, напр.

$$u_1 = \sqrt[p]{R_1} \ldots (1), \quad u_2 = \sqrt[q]{R_2} \ldots (2) \ldots$$

Тогда первая часть уравненія явится уже функціею не только своихъ перемѣнныхъ, но и еще введенныхъ u_1, u_2, и т.д. и приметъ такой видъ:

$$f(x, y \ldots\ldots t, u_1, u_2 \ldots\ldots) = 0$$

Если мы хотимъ избавиться, положимъ, отъ радикала u_1, то расположимъ наше уравненіе по степенямъ u_1

$$a_0 u_1^m + a_1 u_1^{m-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{m-1} u_1 + a_m = 0$$

и присоединимъ къ нему еще изъ соотношен. (1) другое (возведенное (1) въ степень p

$$u^p - R_1 = 0$$

тогда по общему правилу легко исключимъ u_1 изъ этихъ двухъ уравненій. Также легко исключить и u_2 и т.д. Но замѣтимъ, что результатъ исключенія, напр., въ первомъ случаѣ будетъ степени т.р, т.е. уничтоженіе радикаловъ необходимо влечетъ за собою повышеніе степени уравненія.

О Производныхъ многочленахъ.

Величина всякой функціи непосредственно зависитъ отъ величины перемѣнныхъ независимыхъ и съ измѣненіемъ величины послѣднихъ мѣняется тѣмъ или другимъ образомъ. Ученіе о томъ, какъ мѣняется величина функціи въ зависимости отъ ея перемѣнныхъ, и есть ученіе о производныхъ многочленахъ.

Возьмемъ какую-нибудь функцію m'ой степени съ однимъ перемѣннымъ

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-k} x^k + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

и посмотримъ, какъ она измѣнится, если x, y дадимъ

какое-нибудь приращеніе ξ. Но предварительно замѣтимъ, что въ разложеніи по биному Ньютона

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1\cdot 2\dots k}a^{m-k}b^k + \dots + b^m$$

принято для краткости обозначать коэффиціенты такъ: первый черезъ $\binom{m}{0}$, второй — m черезъ $\binom{m}{1}$, третій — черезъ $\binom{m}{2}$ и вообще коэффиціентъ $\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k}$ черезъ $\binom{m}{k}$. Замѣтивъ это, прибавимъ къ перемѣнному x произвольную величину ξ и въ полученномъ выраженіи:

$$f(x+\xi) = a_0(x+\xi)^m + a_1(x+\xi)^{m-1} + \dots + a_{m-k}(x+\xi)^k + \dots + a_m$$

разложимъ всѣ члены по биному Ньютона. Тогда получимъ такой многочленъ:

$$\begin{array}{rl|l|l|l|l}
f(x+\xi) \equiv & a_0x^m + & \binom{m}{1}a_0x^{m-1}\xi + & \binom{m}{2}a_0x^{m-2}\xi^2 + \dots + & \binom{m}{n}a_0x^{m-n}\xi^n + \dots + & \binom{m}{m-1}a_0\xi^{m-1} + \binom{m}{m}a_0\xi^m \\
& + a_1x^{m-1} + & \binom{m-1}{1}a_1x^{m-2}\xi + & \binom{m-1}{2}a_1x^{m-3}\xi^2 + \dots + & \binom{m-1}{n}a_1x^{m-n-1}\xi^n + \dots + & \binom{m-1}{m-1}a_1\xi^{m-1} \\
& \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
& \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
& + a_{m-k}x^k + & \binom{k}{1}a_{m-k}x^{k-1}\xi + & \binom{k}{2}a_{m-k}x^{k-2}\xi^2 + \dots + & \binom{k}{n}a_{m-k}x^{k-n}\xi^n + \dots & \\
& \dots & \dots & \dots & \dots & \\
& \dots & \dots & \dots & & \\
& + a_{m-1}x + & a_{m-1}\xi & & & \\
& + a_m & & & &
\end{array}$$

Если мы теперь разсмотримъ въ этомъ многочленѣ, какъ онъ у насъ написанъ, вертикальные столбцы, отдѣленные у насъ другъ отъ друга линіями, то увидимъ, что первый многочленъ есть какъ данный $f(x)$; если во второмъ вертикальномъ многочленѣ возьмемъ ξ за скобки, то оставшійся въ скобкахъ многочленъ носитъ названіе перваго производнаго. Ясно видно, что онъ получается изъ начальнаго, если каждый его членъ помножить на показателя степени при x, и самого показателя уменьшимъ на единицу; первый производный обозначается обыкновенно $f'(x)$

(со значкомъ ' вверху). Многочленъ, служащій коэффиціентомъ при $\frac{\xi^2}{1.2}$, если мы его вынесемъ за скобку, наз. вторымъ производнымъ, обозначается $f''(x)$ и получается изъ перваго производнаго, очевидно, по тому же правилу, по какому тотъ получается изъ начальнаго. Коэффиціентъ при $\frac{\xi^3}{1.2.3}$ есть третій производный и т.д. при $\frac{\xi^n}{1.2\ldots n}$ — n-ый производный. Итакъ

$$f'(x) \equiv m a_0 x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2} + \ldots + k a_{m-k} x^{k-1} + \ldots + a_{m-1}$$

$$f''(x) \equiv m(m-1) a_0 x^{m-2} + (m-1)(m-2) a_1 x^{m-3} + \ldots + k(k-1) a_{m-k} x^{k-2} + \ldots + a_{m-2}$$

и т.д.

Теперь очевидно, что $f(x+\xi)$ мы можемъ написать такимъ образомъ:

$$f(x+\xi) \equiv f(x) + \xi f'(x) + \frac{\xi^2}{1.2} f''(x) + \frac{\xi^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots + \frac{\xi^n}{1.2\ldots n} f^n(x) + \ldots + \frac{\xi^m}{1.2\ldots m} f^m(x)$$

Это разложеніе на производные носитъ названіе Тейлоровой строки. Такъ какъ x и ξ мы могли бы въ разложеніи переставить, нисколько не измѣнивъ дѣла, то Тейлорова строка можетъ быть переписана такъ:

$$f(x+\xi) = f(\xi) + x \cdot f'(\xi) + \frac{x^2}{1.2} f''(\xi) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^n(\xi) + \ldots + \frac{x^m}{1.2\ldots m} f^m(\xi)$$

Но обратимся опять къ первому виду нашего разложенія. Если мы $f(x)$ перенесемъ въ лѣвую часть и дѣлимъ обѣ части на ξ затѣмъ дадимъ ξ достаточно малую величину, то въ правой части всѣ члены съ ξ^2, ξ^3 и т.д. исчезнутъ (въ предѣлахъ, конечно) и останется только $\xi \cdot f'(x)$

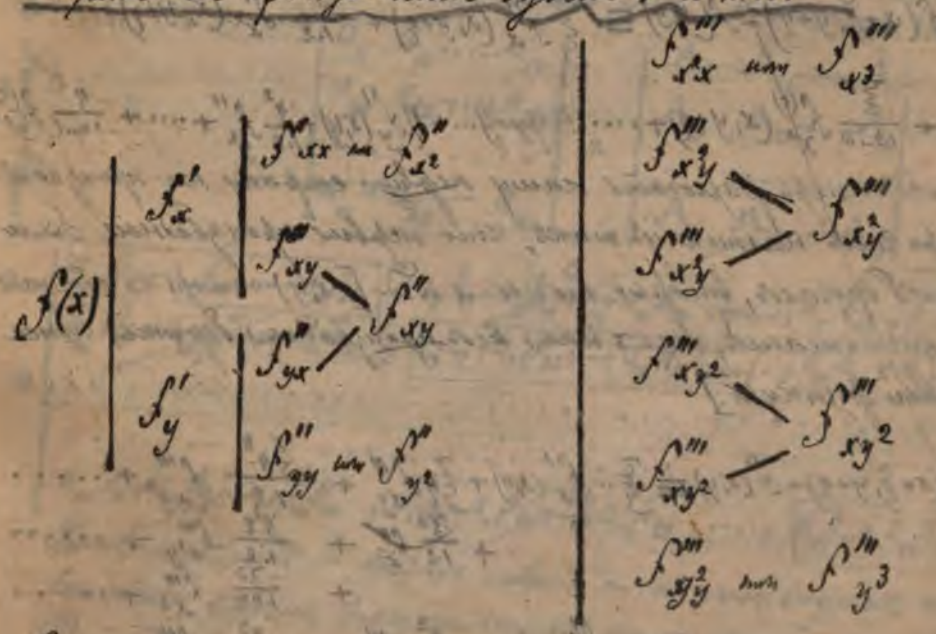
т.е. $$\lim \frac{f(x+\xi) - f(x)}{\xi} = f'(x)$$

Иначе: первый производный многочленъ (или первая производная функція) есть предѣлъ, къ которому приближается отношеніе измѣненія функціи къ измѣненію

переменнаго независимаго.

Производныя функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ. II.

Всякій многочленъ содержитъ не одно перемѣнное, а два или нѣсколько ($x, y, \ldots$), то можно наблюдать измѣненіе его величины въ зависимости отъ измѣненія того или другого перемѣннаго, т.е. находить производныя по x, по y и т.д.; при этомъ находя производныя по одному перемѣнному, мы всѣ остальныя считаемъ за данныя количества. Въ двучленномъ многочленѣ съ двумя перемѣнными первыхъ производныхъ будетъ два (по x и по y); вторыхъ ихъ производныхъ будетъ 4, какъ находятся на первый разъ (мы можемъ брать отъ f'_x производныя по x и по y и отъ f'_y), а только 3, ибо производныя отъ f'_x по y и отъ f'_y по x будутъ тождественны. Третьихъ производныхъ будетъ 4 и т.д.



Замѣтимъ еще, что существуютъ, кромѣ указанныхъ,

особый родъ обозначенія производныхъ. $f(x)$ обозн. f'_x

$f'(x)$	$D_x f$	Слѣд. f''_{xy}	$D^2_{xy} f$
f''_{x^2}	$D^2_x f$	f''_{y^2}	$D^2_{y^2} f$
f'''_{x^3}	$D^3_x f$	f'''_{x^2y}	$D^3_{x^2y} f$
	и т. д.	f'''_{x^3}	$D^3_{x^3} f$

Возьмемъ наперъ однородный многочленъ двухъ перемѣнныхъ $f(x,y)$ и посмотримъ, какъ онъ измѣнится, если мы одновременно x увеличимъ на $x+\xi$ и y на $y+\eta$. Имѣемъ, слѣд. разность

$$f(x+\xi, y+\eta) - f(x,y)$$

Прибавимъ къ этой разности и вычтемъ изъ нея $f(x,y+\eta)$ тогда:

$$f(x+\xi, y+\eta) - f(x,y) \equiv \left[f(x+\xi, y+\eta) - f(x, y+\eta)\right] + \left[f(x, y+\eta) - f(x,y)\right]$$

Теперь обѣ разности представляютъ собою: въ первомъ случаѣ — отъ измѣненія одного x'а на $x+\xi$, а во второмъ — одного y — на $y+\eta$. Тогда по предыдущему напишемъ:

$$f(x+\xi, y+\eta) - f(x,y) \equiv \xi f'_x(x, y+\eta) + \frac{\xi^2}{1.2} f''_{x^2}(x, y+\eta) + \dots\dots$$

$$\dots + \frac{\xi^k}{1.2\dots k} f^{(k)}_{x^k}(x, y+\eta) + \dots\dots \text{(биномъ)} \dots + \eta f'_y(x,y) + \frac{\eta^2}{1.2} f''_{y^2} + \dots\dots + \frac{\eta^l}{1.2\dots l} f^{(l)}_{y^l} + \dots$$

Будемъ теперь разлагать нашу первую скобку на производныя, при чемъ напишемъ такъ, что первыя производныя будутъ надъ другими, вторыя тоже и т. д. [(x,y) теперь въ обозначеніи упоминаться, такъ какъ всѣ производныя будутъ уже отъ этой функціи.]

$$f(x+\xi, y+\eta) - f(x,y) \equiv \xi \cdot f'_x(x,y) + \xi\eta f''_{xy} + \frac{\xi^2\eta}{1.2} f'''_{xy^2} + \dots\dots$$
$$+ \frac{\xi^2}{1.2} f''_{x^2} + \frac{\xi^2\eta}{1.2} f'''_{x^2y} + \dots\dots$$
$$+ \frac{\xi^3}{1.2.3} f'''_{x^3} + \dots\dots$$
$$+ \eta \cdot f'_y(x,y) + \frac{\eta^2}{1.2} f''_{y^2} + \frac{\eta^3}{1.2.3} f'''_{y^3} + \dots\dots$$

$2^{го}$, (3) вертикали $1^{го}$ на горизонтали $2^{го}$ и (4) вертикали $1^{го}$ на вертикали $2^{го}$. Не трудно убедиться, что полученные этими 4 мя способами д-ты тождественны. Мы покажем это правило для д-телей $2^{го}$ порядка; легко, что такое легко доказать по справедливости и для д-телей высшего порядка.

Сопряженные и симметричные д-ты.

Мы знаем, что каждому элементу в д-те соответствуют свой минор, т.е. в д-те будет столько же первых миноров, сколько в нем элементов. Если мы в д-те каждый элемент заменим соответственным ему минором, то составим новый д-т из миноров данного, которому присвоим название сопряженного ему д-та. Между данным д-телем и его сопряженным существует очень простая и интересная связь. Возьмем д-т D и его сопряженный Δ и перемножим их по общему правилу.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \quad a_{nn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \dots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \dots A_{2n} \\ \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} \dots A_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \dots + a_{1n}A_{2n} & \dots & a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \dots + a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \dots + a_{2n}A_{1n} & \boxed{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n}} & \dots & a_{21}A_{n1} + a_{22}A_{n2} + \dots + a_{2n}A_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}A_{11} + a_{n2}A_{12} + \dots + a_{nn}A_{1n} & a_{n1}A_{21} + a_{n2}A_{22} + \dots + a_{nn}A_{2n} & \dots & \boxed{a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \dots + a_{nn}A_{nn}} \end{vmatrix}$$

Всматриваясь в этот новый д-т мы видим, что в нем все члены, кроме диагональных, на основании соотношений (A), (B) и т.д., указанных выше, обращаются в 0, а каждый из диагональных членов представляет начальный д-т, разложенный

Высшая алгебра Листок 5

Лит. Отд. Физ. Ассоц. Высш. Женщ. Курсов.

по элементам одной изъ его строкъ. Слѣд. наше произведеніе представитъ собою такой д-тъ:

$$D.\Delta = \begin{vmatrix} D & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & D & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & D & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots D \end{vmatrix}$$

который есть ничто иное, какъ D^n. Отсюда видимъ, что сопряженный

$$\Delta = \frac{D^n}{D} = D^{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IX)$$

Симметрическимъ д-томъ называется такой, у котораго сопряженные элементы равны, а сопряженными элементами называются такіе, которые занимаютъ одинаковыя по счету мѣста въ одинаковыхъ все по счету горизонталяхъ и вертикаляхъ, напр. второй элементъ первой горизонтали и второй элементъ первой вертикали и т.д. — будутъ сопряженными элементами. Вообще a_{kl} и a_{lk} — есть вз. сопряж.; такъ если въ д-тѣ $a_{12} = a_{21} \ldots$, вообще $a_{lk} = a_{kl}$, д-тъ наз. сопряженнымъ, какъ напр:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \alpha & \beta \\ \alpha & b_2 & \gamma \\ \beta & \gamma & c_3 \end{vmatrix}$$

Приведемъ Вамъ теорему о симметрическихъ д-тахъ.

X. Теорема. Сопряженный д-тъ симметрическаго д-та есть тожее д-тъ симметрическій.

Возьмемъ симметрическій детерминантъ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

и его сопряженный

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

Мы нашли, что $b_1 = a_2$, $c_1 = a_3$ и $c_2 = b_3$; надо доказать, что и $B_1 = A_2$, $C_1 = A_3$ и $C_2 = B_3$. Разложивши нашъ D-тъ по элементамъ первой строки: $D = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$, и замѣнивши въ этомъ разложеніи b_1 и c_1 равными имъ a_2 и a_3 и полученное разложеніе такого вида: $D \equiv a_1A_1 + a_2B_1 + a_3C_1$ — сравнивши съ разложеніемъ даннаго D-ника по элементамъ первой вертикали. $D \equiv a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$. Видимъ, что необходимо $B_1 = A_2$ и $C_1 = A_3$. Также легко доказать, что $C_2 = B_3$

XI. Квадратъ всякаго D-та есть D-тъ симметрическій. Возьмемъ какой-нибудь D-тъ, положимъ, 3го порядка и помножимъ его на самого себя по общему правилу умноженія D-ковъ (т.е. мы возведемъ D-тъ въ квадратъ)

$$D^2 \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2, & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 \\ a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3, & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3, & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix}$$

Прямо изъ этой формулы квадрата видимъ, что D-тъ этотъ есть D-тъ симметрическій, т. е. положеніе наше справедливо.

Приложеніе теоріи D-товъ къ рѣшенію линейныхъ уравненій.

Линейными уравненіями вообще называются уравненія 1ой степени. Если дано нѣсколько такихъ уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными, удовлетворяющихся данными и тѣми же величинами неизвѣстныхъ, то совокупность ихъ называется системою совмѣстныхъ уравненій. Если въ

уравнениях нѣтъ постоянныхъ членовъ, система называется системою однородныхъ уравненій; если постоянные члены есть, уравненія — неоднородны.

Рѣшеніе неоднородныхъ линейныхъ уравненій.

Указанное выше свойство разложенія на миноры опр. $[(A),(B)]$ даетъ намъ возможность найти общую формулу для рѣшенія n уравненій съ n неизвѣстными, если мы имѣли бы только элементарно-алгебраическія знанія. Пусть намъ дано n линейныхъ уравненій съ n неизвѣстными, при чемъ индексы коэффиціентовъ будутъ указывать: 1° на то, въ какомъ уравненіи коэффиціентъ находится, а второй — къ какому неизвѣстному онъ относится.

$$
\begin{array}{ll|l}
(1) & a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1l}x_l+\cdots+a_{1n}x_n=\xi_1 & A_{1l}\\
(2) & a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2l}x_l+\cdots+a_{2n}x_n=\xi_2 & A_{2l}\\
(3) & a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\cdots+a_{3l}x_l+\cdots+a_{3n}x_n=\xi_3 & A_{3l}\\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
(k) & a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+a_{k3}x_3+\cdots+a_{kl}x_l+\cdots+a_{kn}x_n=\xi_k & A_{kl}\\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
(n) & a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\cdots+a_{nl}x_l+\cdots+a_{nn}x_n=\xi_n & A_{nl}
\end{array}
$$

Изъ коэффиціентовъ этихъ уравненій составимъ Δ-нтъ. Онъ будетъ, очевидно, такой:

$$
\Delta=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kl} & \cdots & a_{kn}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

Пусть теперь намъ нужно рѣшить данную систему уравненій

относительно неизвестного x_l. Для этого помножимъ обѣ части первого уравненія на миноръ нашего опредѣлителя при коэффиціентѣ x_l въ первомъ уравненіи, т.е. при a_{1l}, обѣ части второго на миноръ коэффиціента x_l во второмъ ур. и т.д. до послѣдняго. Сложивъ всѣ полученныя уравненія, будемъ имѣть (вынося x_1, x_2 и т.д. за скобки):

$$\begin{aligned}
&(a_{11}A_{1l} + a_{21}A_{2l} + \cdots + a_{k1}A_{kl} + \cdots + a_{n1}A_{nl})x_1 + \\
&+ (a_{12}A_{1l} + a_{22}A_{2l} + \cdots + a_{k2}A_{kl} + \cdots + a_{n2}A_{nl})x_2 + \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&+ (a_{1l}A_{1l} + a_{2l}A_{2l} + \cdots + a_{kl}A_{kl} + \cdots + a_{nl}A_{nl})x_l + \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&+ (a_{1n}A_{1l} + a_{2n}A_{2l} + \cdots + a_{kn}A_{kl} + \cdots + a_{nn}A_{nl})x_n = \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \xi_1 A_{1l} + \xi_2 A_{2l} + \xi_3 A_{3l} + \cdots + \xi_k A_{kl} + \cdots + \xi_n A_{nl}.
\end{aligned}$$

Въ первой части этого уравненія на основаніи указанныхъ уже соотношеній (A), (B) и т.д. всѣ коэффиціенты кромѣ коэффиціента при x_l равны 0, а коэффиціентъ при x_l, очевидно, $= D$; тогда наше уравненіе перепишется такъ:

$$D \cdot x_l = \xi_1 A_{1l} + \xi_2 A_{2l} + \cdots + \xi_k A_{kl} + \cdots + \xi_n A_{nl}$$

или отсюда:

$$x_l = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots \xi_1 \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots \xi_2 \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots \xi_n \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1l} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2l} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nl} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Давая въ полученной общей формулѣ индексу l всѣ возможныя значенія отъ 1 до n, получимъ всѣ n рѣшеній, напр.

$$D.x_1 = \xi_1 A_{11} + \xi_2 A_{21} + \dots + \xi_k A_{k1} + \dots + \xi_n A_{n1}$$
$$D.x_2 = \xi_1 A_{12} + \xi_2 A_{22} + \dots + \xi_k A_{k2} + \dots + \xi_n A_{n2}$$
и т.д.

Нужно замѣтить для всѣхъ рѣшеній знаменатель будетъ одинъ и тотъ же, именно D.

Новая связь между д-тами данным и его сопряженнымъ.

Напишемъ всѣ n рѣшеній предыдущей системы:

$$D.x_1 = \xi_1 A_{11} + \xi_2 A_{21} + \dots + \xi_k A_{k1} + \dots + \xi_n A_{n1}$$
$$D.x_2 = \xi_1 A_{12} + \xi_2 A_{22} + \dots + \xi_k A_{k2} + \dots + \xi_n A_{n2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$D.x_l = \xi_1 A_{1l} + \xi_2 A_{2l} + \dots + \xi_k A_{kl} + \dots + \xi_n A_{nl}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$D.x_n = \xi_1 A_{1n} + \xi_2 A_{2n} + \dots + \xi_k A_{kn} + \dots + \xi_n A_{nn}$$

Если теперь въ этой новой системѣ примемъ всѣ x за данныя количества и, наоборотъ, всѣ ξ за неизвѣстныя, то для рѣшенія этой системы должны составить д-тъ изъ миноровъ, который будетъ сопряженнымъ прежняго д-та D.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} \dots & A_{k1} \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots & A_{k2} \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} \dots & A_{kn} \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

Обозначимъ миноры этого новаго д-та Δ черезъ α_{11}, α_{12}, и т.д., найдемъ по предыдущему рѣшеніе для какого-нибудь ξ_k:

$$\Delta.\xi_k = D(\alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_2 + \dots + \alpha_{kl}x_l + \dots + \alpha_{kn}x_n)$$

Такъ какъ по формулѣ (IX) $\Delta = D^{n-1}$, то

$$\xi_k = \frac{1}{D^{n-2}}(\alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_2 + \dots + \alpha_{kl}x_l + \dots + \alpha_{kn}x_n)$$

Но ур. (k) первоначальной нашей системы мы имеем, то

$$\Sigma_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kl}x_l + \dots + a_{kn}x_n$$

Из двух последних равенств имеем такое соотношение

$$\frac{1}{D^{n-2}}\left(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kl}x_l + \dots + a_{kn}x_n\right) \equiv$$

$$\equiv a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kl}x_l + \dots + a_{kn}x_n.$$

Это соотношение есть тождество, так как оно существует для всяких значений x_1, x_2, x_3 и т.д., а сие это – тождество, то коэффициенты при неизвестных необходимо равны соответственно, след. получим ряд следующих равенств:

$$\alpha_{k1} = a_{k1} \cdot D^{n-2}$$
$$\alpha_{k2} = a_{k2} \cdot D^{n-2}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_{kn} = a_{kn} \cdot D^{n-2}$$

На основании этих равенств мы и делаем такое заключение, указывающее новую зависимость данного и сопряженного ему д-тов: миноры сопряженного д-та равны соответственным элементам данного, помноженным на самый данный д-тъ в степени на 2 меньшей чем его порядок: $(n-2)$.

Решение системы однородных линейных уравнений.

Прежде чем перейти к системе однородных уравнений, разберем один случай, так сказать, переходный от неоднородных уравнений к однородным, именно тот, когда в системе все уравнения, кроме одного, не имеют известных членов, т.е. однородны. Возьмем систему таких уравнений:

$$
(I)\quad
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1l}x_l + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2l}x_l + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kl}x_l + \dots + a_{kn}x_n = \xi_k \quad \dots(k) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nl}x_l + \dots + a_{nn}x_n = 0
\end{cases}
$$

Если мы рассмотрим этот случай, как частный случай неоднородных уравнений (он и есть такой на самом деле), именно когда все ξ, кроме только ξ_k, равны 0, то по предыдущему легко получаем решения. Мы имеем, что

$$x_l = \frac{1}{D}\left(\xi_1 A_{1l} + \xi_2 A_{2l} + \dots + \xi_k A_{kl} + \dots + \xi_n A_{nl}\right)$$

В данном случае это решение примет такой вид

$$x_l = \frac{\xi_k A_{kl}}{D}$$

так как все остальные члены обращаются в 0. Аналогично найдем:

$$x_1 = \frac{\xi_k A_{k1}}{D};\ x_2 = \frac{\xi_k A_{k2}}{D};\ \dots\dots\ x_l = \frac{\xi_k A_{kl}}{D};\ \dots\ x_n = \frac{\xi_k A_{kn}}{D}.$$

Вглядываясь в эти решения мы легко замечаем одно очень важное соотношение, которое именно и нужно нам для дальнейшего; мы видим, что все решения имеют множителем ξ_k и делителем D, а различаются только минорами, следовательно:

$$x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_l : \dots x_n = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3} : \dots : A_{kl} : \dots : A_{kn}$$

т.е. неизвестные в данной системе относятся, как миноры коэффициентов соответствующих им в единственном неоднородном уравнении. В минорах коэффициенты неоднородного ур-ния не входят, след. отношение решений не зависит от них, а также и от ξ_k, которое можем сократить, не меняя этого отношения.

Если мы положим теперь и $\xi_k = 0$, т.е. перейдем к системе однородных уравнений такого вида:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1l}x_l + \dots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2l}x_l + \dots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\text{II} \quad a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kl}x_l + \dots + a_{kn}x_n = 0 \quad (k)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nl}x_l + \dots + a_{nn}x_n = 0$$

то сдѣлается яснымъ, что всѣ рѣшенія будутъ нули, хотя, какъ увидимъ, это рѣшеніе и не единственное. Дѣйств. рѣшенія принимаютъ такой видъ:

$$Dx_1 = 0\ ;\ Dx_2 = 0\ ;\dots Dx_l = 0;\ \dots Dx_n = 0.$$

Очевидно, что если D не есть 0, система можетъ удовлетворяться только нулевыми рѣшеніями; но когда $D=0$, дѣломѣняется, и рѣшенія дѣлаются неопредѣленными, такъ какъ $x_1 = \frac{0}{0}$ (т.е. и т.д. Но это не значитъ, что всѣ рѣшенія совершенно произвольны. Припомнимъ, что мы только что нашли опредѣленное отношеніе между неизвѣстными и при томъ такое, которое не зависило отъ величины ξ_k и которое, слѣд. не измѣнилось и въ данномъ случаѣ, когда ξ_k стало 0.

Замѣтимъ еще при этомъ, что въ данномъ случаѣ это отношеніе — не есть непремѣнно отношеніе миноровъ строки (k), но какихъ угодно, потому что отъ насъ зависитъ, какое уравненіе въ системѣ II считать игравшимъ ту роль, которую въ системѣ I играло ур. (k). Слѣд., мы имѣемъ право написать:

$$x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_l : \dots : x_n = A_{11} : A_{12} : \dots : A_{1l} : \dots : A_{1n} =$$
$$= A_{21} : A_{22} : \dots : A_{2l} : \dots : A_{2n} =$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$= A_{k1} : A_{k2} : \dots : A_{kl} : \dots : A_{kn} =$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$= A_{n1} : A_{n2} : \dots : A_{nl} : \dots : A_{nn} =$$

если между неизвѣстными существуетъ такое опредѣ-

лекные отношенія, что очевидно, что только одно изъ нихъ можетъ быть произвольно, остальные же обусловливаются этимъ отношеніемъ, такъ что, давъ, произвольную величину λ и помноживъ ее на какой-нибудь (произвольно взятый) рядъ миноровъ, мы можемъ утверждать, что величины

$$\lambda A_{11},\ \lambda A_{12},\ \ldots\ldots\ \lambda A_{1l}\ \ldots\ldots\ \lambda A_{1n}$$

удовлетворяютъ нашей системѣ. Дѣйствительно, подставивъ эти величины въ II-ую систему, увидимъ, что λ выносится за скобки и сократится, а полученныя равенства такого вида:

$$a_{n}A_{11} + a_{n2}A_{12} + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}A_{1n} = 0 \quad \text{и т.д.}$$

будутъ, очевидно, тождественны.

Итакъ, мы можемъ сказать вообще, что система однородныхъ линейныхъ уравненій удовлетворяется нулевыми рѣшеніями, кромѣ одного частнаго случая, когда она удовлетворяется еще и безчисленнымъ множествомъ конечныхъ рѣшеній, находящихся между собой въ опредѣленномъ отношеніи, именно случая, когда Д изъ коэффиціентовъ системы равенъ нулю. //

Посмотримъ теперь на нашу систему съ нѣсколько иной точки зрѣнія. Если мы всѣ уравненія раздѣлимъ, наприм., на x_n и обозначимъ $\frac{x_1}{x_n}$ черезъ ξ_1, $\frac{x_2}{x_n}$ черезъ ξ_2 и т.д., получимъ такую систему уравненій:

$$\begin{aligned}
&a_{n}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots\ldots + a_{nk}\xi_k + \ldots\ldots + a_{n,n-1}\xi_{n-1} + a_{nn} = 0\\
&a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots\ldots + a_{2k}\xi_k + \ldots\ldots + a_{2,n-1}\xi_{n-1} + a_{2n} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{l1}\xi_1 + a_{l2}\xi_2 + \ldots\ldots + a_{lk}\xi_k + \ldots\ldots + a_{l,n-1}\xi_{n-1} + a_{ln} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots\ldots + a_{nk}\xi_k + \ldots\ldots + a_{n,n-1}\xi_{n-1} + a_{nn} = 0
\end{aligned}$$

Это есть система n неоднородныхъ уравненій съ $n-1$ неизвѣстными; подобная система носитъ названіе условной.

Когда всѣ n уравненій удовлетворяются данными значеніями неизвѣстныхъ, говорятъ, что система согласна. Спрашивается, какому же условію должна быть подчинена система, чтобы она была согласна. Выяснить это условіе не можетъ, очевидно, рѣшивъ n−1 какихъ-нибудь уравненій изъ числа данныхъ относительно n−1 неизвѣстныхъ, въ нихъ входящихъ, и подставивъ полученныя рѣшенія въ оставшееся n'ое уравненіе. Если система согласна, то и это уравненіе должно удовлетворяться. Сдѣлаемъ это: рѣшимъ уравненія, кромѣ послѣдняго и найденныя рѣшенія (положимъ они будутъ: $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3 \ldots \xi'_{n-1}$) подставимъ въ послѣднее; тогда получимъ

$$a_{n1}\xi'_1 + a_{n2}\xi'_2 + \ldots + a_{nk}\xi'_k + \ldots + a_{n,n-1}\xi'_{n-1} + a_{nn} = 0 \quad (n)$$

Условіе того, чтобы это уравненіе было тождественно, и будетъ условіемъ согласія системы. Очевидно, рѣшенія ξ'_1, ξ'_2 и т.д., вообще говоря, не обращаютъ первой части въ нуль, а равенство тождественно нулю, только если Δ въ данной системѣ есть 0. Тогда по предыдущему имѣемъ, что

$$x_1 : x_2 : \ldots\ldots : x_n = A_{n1} : A_{n2} : \ldots\ldots A_{nn};$$

а слѣдовательно

$$\xi'_1 = \frac{x_1}{x_n} = \frac{A_{n1}}{A_{nn}}; \quad \xi'_2 = \frac{x_2}{x_n} = \frac{A_{n2}}{A_{nn}}; \ldots\ldots \xi'_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{A_{n,n-1}}{A_{nn}}$$

Подставляя эти выраженія въ ур. (n) и уничтожая знаменатель, найдемъ:

$$a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}A_{nn} = 0$$

А это и значитъ $\Delta = 0$; т.е. справедливо, что условіе согласія системы есть равенство 0 Δ-та изъ коэффиціентовъ ея уравненій.

Итакъ въ первомъ случаѣ равенство нулю Δ-та изъ коэффиціентовъ уравненій системы указывало на то, что

системы допускает нулевые и конечные решения, а не только нулевые, и во второмъ, въ случаѣ условій системы, указываетъ, что система согласна.

Возьмемъ для примѣра такія три однородныя уравненія съ тремя неизвѣстными:

$$3x - 3y + z = 0$$
$$2x + 5y - 4z = 0$$
$$x + y - z = 0$$

Детерминантъ этой системы:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -15 + 12 - 6 + 12 + 2 - 5 = 0.$$

И дѣйствительно мы видимъ, что она удовлетворяется не только значеніями $x = y = z = 0$, но и $x = \lambda;\ y = 2\lambda;\ z = 3\lambda$. (Миноры тоже относятся, какъ $1 : 2 : 3$.).

О функціяхъ.

Если мы возьмемъ какое-нибудь переменное количество x и произведемъ надъ нимъ цѣлый рядъ какихъ-нибудь дѣйствій при помощи другихъ количествъ, напримѣръ $2, 10 \ldots a, b \ldots y, z$, принимая послѣднія за извѣстныя (хотя, въ сущности говоря, они могутъ быть и не вполнѣ извѣстны), то результатъ этого ряда дѣйствій надъ x'емъ называется его <u>функціею</u> и обозначается $f(x)$, $f'(x)$; $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и т. д. Напримѣръ $\frac{(10x^2 - b)^2 (\sqrt{x} - a)^3}{(x - 5x)(\sqrt{x-1} + 5\sqrt{x})}$ есть функція x'а. Перемѣнныхъ въ функціи можетъ быть не одно, а два и нѣсколько; тогда обозначаютъ такъ:

$$f(x,y) \ ; \ f(x,y,z \ldots t).$$

Если одно количество есть функция другого, то 2-е есть обратная функция первого; если $y = f(x)$, то $x = \varphi(y)$. Например $y = x^2 - 1$; отсюда $x = \pm\sqrt{y+1}$ (обратная функция)

Классификация функций.

Смотря по тому, совершаются-ли над x только шесть элементарных алгебраических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня) в каком угодно, но конечном, количестве, или совершаются другие, не приводимые к ним (напр. $\lg x$, $\sin x$), функции имеют название или алгебраических или трансцендентных.

Алгебраические функции делятся на рациональные и иррациональные: если функция не содержит радикалов — она рациональна, если содержит — иррациональна. Целая рациональная функция может быть представлена в виде такой дроби, что ни в числителе, ни в знаменателе не войдет знак деления, напр.

$$\frac{\frac{(x^2-1)^2+\frac{2}{x^3}}{x^2-ax+b}+(x-1)^4}{\frac{(x^2+2x-1)^5}{x}-\frac{1}{x+1}} = \frac{\{x^3(x^2-1)^2+2+(x-1)^4 x^3(x^2-ax+b)\}x\cdot(x+1)}{[(x+2x-1)^5(x+1)-x]x^3(x^2-ax+b)}$$

В общем виде эта дробь представится так:

$$\frac{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_nx^{n-k}+\dots+A_{n-1}x+A_n}{B_0x^m+B_1x^{m-1}+\dots+B_lx^{m-l}+\dots+B_{m-1}x+B_m}$$

Это и есть общий вид рациональной функции; дробь эта наз. рациональной дробью. В частном случае, когда знаменатель 1, функция наз. целой рациональной функцией; она при всяком

конечномъ значеніи x'а имѣетъ значеніе конечное, тогда какъ раціональная дробь можетъ имѣть величину бу-конечно большую (при такомъ значеніи x, которое обращаетъ знаменатель въ 0).

О цѣлыхъ многочленахъ.

Функція такого вида:

$$A_0 x'^n + A_1 x'^{n-1} + \dots + A_k x'^{n-k} + \dots + A_{n-1} x' + A_n$$

есть цѣлый многочленъ одного перемѣннаго; конечно, могутъ быть цѣлые многочлены для двухъ и сколько угодно перемѣнныхъ. Если мы въ написанномъ многочленѣ замѣнимъ x' черезъ $\frac{x}{y}$, то получимъ:

$$\left(\frac{1}{y^n}\right)\left[A_0 x^n + A_1 x^{n-1} y + \dots + A_k x^{n-k} y^k + \dots + A_{n-1} x y^{n-1} + A_n y^n\right]$$

Многочленъ, заключенный въ скобкахъ, независимо отъ множителя $\frac{1}{y^n}$, носитъ названіе однороднаго многочлена двухъ буквъ; всѣ члены его имѣютъ одинаковое измѣреніе — n, и многочленъ есть мн. n'ой степени. Число его членовъ, очевидно, $n+1$. Въ полномъ многочленѣ съ двумя перемѣнными будутъ члены n'го измѣренія (они составятъ однородный многочленъ n'ой степени), члены $n-1$'го измѣренія (однород. мног. $n-1$'ой ст.) и т. д. Онъ изображается, обыкновенно $\sum A x^p y^q$, и имѣетъ такой видъ:

	Число членовъ:
$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} y + \dots + A_k x^{n-k} y^n + \dots + A_{n-1} x y^{n-1} + A_n y^n +$	$n+1$
$+ B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} y + \dots + B_l x^{n-l-1} y^l + \dots + B_{n-2} x y^{n-2} + A_{n-1} y^{n-1} +$	n
$+ C_0 x^{n-2} + C_1 x^{n-3} y + \dots + C_s x^{n-s-2} y^s + \dots + C_{n-2} y^{n-2} +$	$n-1$
.....	...
.....	...
$+ D_0 x^2 + D_1 xy + D_2 y^2 +$	3
$+ E_0 x + E_1 y +$	2
$+ F_0$	1

Число членов этого многочлена есть очевидно $\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}$ (полный)

Если мы теперь этот многочлен сделаем (таким же путем как и прежде) однородным, то можем полученный однородный многочлен принять за сумму степеней членов полного многочлена с 3-мя переменными и получим этот полный многочлен 3-й переменных; поступая как давеча, получим многочлены с 4-мя 5-ю и т. д. неизвестными. Посмотрим, какое будет число членов этих многочленов. В полном многочлене с одной переменной мы видели, $n+1$ членов, с двумя переменными $\frac{(n+2)(n+1)}{1\cdot 2}$; для 3-х пер. число членов $= \frac{(n+2)(n+1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \dots$ $\dots + 3 + 1$. Мы получили этот ряд, принимая во внимание, что в первой строке $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ членов, а в остальных на единицу. Чтобы вычислить величину этого ряда, возьмем произведение 3-х множителей $(n+3)(n+2)(n+1)$ и вычтем из него величину, получающуюся от подстановки в него вместо n — $n-1$; затем из этой последней вычтем опять произведение уменьшенных единицею множителей и т. д.; получим ряд таких равенств:

$$(n+3)(n+2)(n+1) - (n+2)(n+1)n = 3(n+2)(n+1)$$
$$(n+2)(n+1)n - (n+1)n(n-1) = 3(n+1)n$$
$$(n+1)n(n-1) - n(n-1)(n-2) = 3(n-1)n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

При $n=2$ $\quad 5\cdot 4\cdot 3 - 4\cdot 3\cdot 2 = 3\cdot 4\cdot 3$

При $n=1$ $\quad 4\cdot 3\cdot 2 - 3\cdot 2\cdot 1 = 3\cdot 3\cdot 2$

При $n=0$ $\quad 3\cdot 2\cdot 1 - 0 = 3\cdot 2\cdot 1$

Сложив почленно эти равенства, получим:

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 3\cdot 2\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + \dots + 3 + 1\right]$$

или, разделив все на $1\cdot 2\cdot 3$:

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + \dots + 3 + 1 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

Это, как видно, и есть искомая нами сумма.

Теперь покажемъ, что эта формула справедлива вообще для числа членовъ многочлена съ $m+1$ перемѣнными. Составимъ, по предыдущему, рядъ равенствъ: (въ кажд. произв. буд. $m+1$ производныхъ)

$$(n+m+1)(n+m)\ldots(n+1) - (n+m)(n+m-1)\ldots n = (n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)\,[m+1]$$

$$(n+m)(n+m-1)\ldots n - (n+m-1)(n+m-2)\ldots(n-1) = (n+m-1)(n+m-2)\ldots n\,[m+1]$$

$$(n+m-1)(n+m-2)\ldots(n-1) - (n+m-2)(n+m-3)\ldots(n-2) = (n+m-2)(n+m-3)\ldots(n-1)\,[m+1]$$

. . . . . .

При $n=1$ $\quad (m+2)\cancel{(m+1)}\ldots 3\cdot 2 - \cancel{(m+1)m(m-1)}\ldots 2\cdot 1 = (m+1)m\ldots 3\cdot 2\,[m+1]$

При $n=0$ $\quad \cancel{(m+1)m}\ldots 2\cdot 1 - m\cancel{(m-1)}\ldots 1\cdot 0 = m\ldots 2\cdot 1\,[m+1]$

Сложивъ теперь всѣ вторыя части, а затѣмъ и первыя, получимъ:

$$(m+1)\Big[(n+m)(n+m-1)\ldots(n+1) + (n+m-1)(n+m-2)\ldots n + \ldots + (m+1)m\ldots 3\cdot 2 + m\ldots$$

$$= (n+m+1)(n+m)\ldots(n+1)$$

Раздѣлимъ теперь обѣ части полученнаго равенства на

$$1\cdot 2\ldots\ldots m(m+1)$$

получимъ:

$$\frac{(n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots m} + \frac{(n+m-1)(n+m-2)\ldots n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m} + \ldots + (m+1) + 1 = \frac{(n+m+1)(n+m)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m+1)}$$

Это и есть общая формула числа членовъ.

Мы видѣли уже, что всякій полный многочленъ разбивается на цѣлый рядъ однородныхъ многочленовъ, степень которыхъ все понижается на единицу (степень выстоя изъ нихъ есть степень самого полнаго многочлена). Эти однородные многочлены носятъ названіе алгебраическихъ формъ, при чемъ называются бинарными формами, если многочленъ съ 2-мя перемѣнными, тернарными, если съ тремя и т.д., и вообще алгебраическими формами m-ой степени съ n перемѣнными, если однородный многочленъ степени m, и число перемѣнныхъ въ немъ n.

———.———

Складываем теперь по вертикальным столбцам:

$$f(x+\xi, y+\eta) - f(x,y) \equiv \left(\xi f'_x + \eta f'_y\right) + \frac{1}{1.2}\left[\xi^2 f''_{x^2} + 2\xi\eta f''_{xy} + \eta^2 f''_{y^2}\right] +$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\left[\xi^3 f'''_{x^3} + 3\xi^2\eta f'''_{x^2y} + 3\xi\eta^2 f'''_{xy^2} + \eta^3 f'''_{y^3}\right] + \cdots.$$

Если теперь в этой формуле заменим изображения производных теми обозначениями, о которых мы только что говорили, и позволим себе, для удобства запоминания формулы, вынести символически f за скобки, а оставшееся в скобках выражение представим в виде квадрата суммы, куба суммы и т.д., то получим такую формулу:

$$f(x+\xi, y+\eta) - f(x,y) = \left[\xi D_x + \eta D_y\right] f + \frac{1}{1.2}\left[\xi D_x + \eta D_y\right]^2 f +$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\left[\xi D_x + \eta D_y\right]^3 f + \cdots.$$

или, обозначая $\left[\xi D_x + \eta D_y\right]$ через Δ, получим

$$= \Delta f + \frac{\Delta^2}{1.2} f + \frac{\Delta^3}{1.2.3} f + \cdots$$

Теорема Эйлера. Однородная функция, полученная на показатель m степени, равна сумме своих первых производных, полученных на переменных, по которым эти производные взяты.

Возьмем однородный многочлен m с двумя переменными:

$$f(x,y) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + a_2 x^{m-2} y^2 + \cdots + a_x x^{m-x} y^x + \cdots + a_m y^m$$

и частные оба производных этого многочлена

$$f'_x \equiv m a_0 x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2} y + \cdots + (m-x) a_x x^{m-x-1} y^x + \cdots + a_{m-1} y^{m-1}$$

$$f'_y \equiv a_1 x^{m-1} + \cdots + x a_x x^{m-x} y^{x-1} + \cdots + (m-1) a_{m-1} x y^{m-2} + m a_m y^{m-1}$$

Помножим теперь f'_x на x и f'_y на y и сложим:

Лит. Общ. Ред. Изд. Инж. Киев.

Теперь покажемъ, что эта формула справедлива вообще для числа членовъ многочлена съ $m+1$ перемѣнными. Составимъ, по предыдущему, рядъ равенствъ: (въ кажд. произв. буд. $m+1$ производныхъ)

$$(n+m+1)(n+m)\ldots(n+1) - (n+m)(n+m-1)\ldots n = (n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)\,[m+1]$$

$$(n+m)(n+m-1)\ldots n - (n+m-1)(n+m-2)\ldots(n-1) = (n+m-1)(n+m-2)\ldots n\,[m+1]$$

$$(n+m-1)(n+m-2)\ldots(n-1) - (n+m-2)(n+m-3)\ldots(n-2) = (n+m-2)(n+m-3)\ldots(n-1)\,[m+1]$$

. . . . . .

При $n=1$ $\quad (m+2)(m+1)\ldots 3.2 - (m+1)m(m-1)\ldots 2.1 = (m+1)m\ldots 3.2\,[m+1]$

При $n=0$ $\quad (m+1)m\ldots 2.1 - m(m-1)\ldots 1.0 = m\ldots 2.1\,[m+1]$

Сложивъ теперь всѣ вторыя части, а затѣмъ и первыя, получимъ:

$$(m+1)\Big[(n+m)(n+m-1)\ldots(n+1) + (n+m-1)(n+m-2)\ldots n + \ldots + (m+1)m\ldots 3.2 + m\ldots 2$$

$$= (n+m+1)(n+m)\ldots(n+1)$$

Раздѣлимъ теперь обѣ части полученнаго равенства на

$$1.2\ldots\ldots m(m+1)$$

получимъ:

$$\frac{(n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots\ldots m} + \frac{(n+m-1)(n+m-2)\ldots n}{1.2.3\ldots m} + \ldots + (m+1) + 1 = \frac{(n+m+1)(n+m)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(m+1)}$$

Это и есть общая формула числа членовъ.

Мы видѣли уже, что всякій полный многочленъ разбивается на цѣлый рядъ однородныхъ многочленовъ, степень которыхъ все понижается на единицу (степень высшаго изъ нихъ есть степень самого полнаго многочлена). Эти однородные многочлены носятъ названіе алгебраическихъ формъ, при чемъ называются бинарными формами, если многочленъ съ 2-мя перемѣнными, тернарными, если съ тремя и т.д., и вообще алгебраическими формами m-ой степени съ n перемѣнными, если однородный многочленъ степени m, и число перемѣнныхъ въ немъ n.

———.———

Сказанное теперь по вертикальным столбцам:

$$f(x+\xi, y+\eta) - f(x,y) \equiv (\xi f'_x + \eta f'_y) + \frac{1}{1\cdot 2}\left[\xi^2 f''_{x^2} + 2\xi\eta f''_{xy} + \eta^2 f''_{y^2}\right] +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[\xi^3 f'''_{x^3} + 3\xi^2\eta f'''_{x^2y} + 3\xi\eta^2 f'''_{xy^2} + \eta^3 f'''_{y^3}\right] + \cdots.$$

Если теперь в этой формуле заменить обозначения производных теми обозначениями, о которых мы только что говорили, и позволить себе, для удобства запоминания формулы, вынести символически f за скобки, а стоящие в скобках многочлены представить в виде квадрата суммы, куба суммы и т.д., то получим такую формулу:

$$f(x+\xi, y+\eta) - f(x,y) = \left[\xi D_x + \eta D_y\right] f + \frac{1}{1\cdot 2}\left[\xi D_x + \eta D_y\right]^2 f +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[\xi D_x + \eta D_y\right]^3 f + \cdots.$$

или, обозначая $\left[\xi D_x + \eta D_y\right]$ через Δ, получим

$$= \Delta f + \frac{\Delta^2}{1\cdot 2} f + \frac{\Delta^3}{1\cdot 2\cdot 3} f + \cdots$$

Теорема Эйлера. *Однородная функция, многочленная на показатель n степени, равна сумме своих первых производных, помноженных на переменных, по которым эти производные взяты.*

Возьмем однородный многочлен с двумя переменными:

$$f(x,y) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_x x^{n-x} y^x + \cdots + a_n y^n$$

и найдем оба производных этого многочлена

$$f'_x \equiv n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} y + \cdots + (n-x) a_x x^{n-x-1} y^x + \cdots + a_{n-1} y^{n-1}$$

$$f'_y \equiv a_1 x^{n-1} + \cdots + x a_x x^{n-x} y^{x-1} + \cdots + (n-1) a_{n-1} x y^{n-2} + n a_n y^{n-1}$$

Помножим теперь f'_x на x и f'_y на y и сложим:

Лит. Общ. Ред. Изд. Акад. Наук. Киев.

$$x.f'_x + y f'_y \equiv m a_0 x^m + m a_1 x^{m-1} y + \dots + m a_k x^{m-k} y^k + \dots + m a_m y^m$$

Вынося во второй части m за скобки увидимъ, что въ скобкахъ останется нашъ однородный многочленъ $f(x,y)$, т.е.

$$m.f(x,y) \equiv x.f'_x + y f'_y$$

т.е. теорема наша для этого случая справедлива. Аналогично можно доказать, что

$$m.f(x,y,z) \equiv x.f'_x + y f'_y + z.f'_z$$

и т.д.

Выраженіе производной функціи черезъ корни данной.

Дана нѣкоторая функція m-ой степени относительно x

$$f(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m \quad \dots\dots \quad (I)$$

и требуется выразить ея первую производную черезъ ея корни. Сама наша функція черезъ корни, какъ мы знаемъ, выражается такъ:

$$f(x) \equiv a_0 (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_m) \quad (II)$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ — есть всѣ m корней функціи. Для отысканія производной дадимъ и теперь, какъ дѣлали раньше, x-у значеніе $x+\xi$.

Тогда $f(x)$ приметъ такой видъ:

$$f(x+\xi) \equiv a_0 (x+\xi-\alpha_1)(x+\xi-\alpha_2)\dots\dots(x-\alpha_m+\xi)$$

Раздѣлимъ полученное теперь тождество на тождество (I)

$$\frac{f(x+\xi)}{f(x)} = \frac{a_0 (x-\alpha_1+\xi)(x-\alpha_2+\xi)\dots(x-\alpha_m+\xi)}{a_0 (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_m)}$$

или, дѣля отдѣльно множители одинъ на другой и множа все на $f(x)$

$$f(x+\xi) = f(x)\left(1+\frac{\xi}{x-\alpha_1}\right)\left(1+\frac{\xi}{x-\alpha_2}\right)\left(1+\frac{\xi}{x-\alpha_3}\right)\dots\left(1+\frac{\xi}{x-\alpha_m}\right)$$

Припомнимъ теперь, что мы называли первымъ производнымъ

многочленом данной функции: это есть коэффициент при первой степени Σ в разложении $f(x+\Sigma)$. Посмотрим теперь, каков будет этот коэффициент в нашем выводе теор. Если мы перемножим все биномы, не трудно сообразить, что при первой степени Σ в произведении коэффициентов будет сумма вторых членов биномов, полученных из $f(x)$, т.е.

$$f'(x) \equiv \frac{f(x)}{x-\alpha_1} + \frac{f(x)}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{f(x)}{x-\alpha_m}$$

Представив себе $f(x)$ в виде произведения $a_0(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_m)$, увидим, что все члены второй части нашего тождества будут многочлены целые, $m-1$-ой степени относительно x, и весь производный представится в виде суммы таких произведений:

$$f'(x) = a_0\{(-)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_m) +$$
$$+(x-\alpha_1)(-)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_m) +$$
$$+(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(-)\dots(x-\alpha_m) +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_{m-1})(-)\}$$

Черточки в скобках означают, какие из каждого произведения многочленов пропущены при числе всех, входящих в $f(x)$

Дискриминанты

Мы знаем, что целый многочлен степени m имеет всегда m действительных или мнимых корней, но эти корни могут и не все быть различны, некоторые из них могут быть одинаковы; эти повторяющиеся корни носят название корней кратных. Если корень повторяется два раза - он двукратный, три - трехкратный и т.д. Вообще

многочлен съ повторяющимися корнями можно представить такъ:

$$a_0(x-\alpha_1)^{p_1}(x-\alpha_2)^{p_2}\dots(x-\alpha_n)^{p_n},$$

при чемъ $p_1+p_2+\dots p_n=m$. Очевидно, что если многочленъ имѣетъ кратные корни, коэффиціенты его находятся въ нѣкоторой зависимости. Зависимость эта выражается въ равенствѣ нулю нѣкоторой алгебраической функціи, которая носитъ названіе дискриминанта. Прежде чѣмъ найти эту зависимость, укажемъ на одну важную теорему.

Теорема. Если данный многочленъ не имѣетъ общихъ корней съ своимъ первымъ производнымъ, то онъ не имѣетъ и кратныхъ корней, и наоборотъ, если имѣетъ корни, общіе съ производнымъ, то имѣетъ и кратные корни.

Примемъ, какъ первый производный многочленъ выражается черезъ корни даннаго:

$$f'(x)=a_0\{(-)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_m)+$$
$$+(x-\alpha_1)(-)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_m)+$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(-)(x-\alpha_m)+$$
$$+(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots\dots(x-\alpha_{m-1})(-)\}$$

Если положимъ, что всѣ корни различны, увидимъ, что при $x=\alpha_1$ или α_2 и т.д. $f'(x)$ обращается въ 0, но ни одинъ изъ этихъ корней не обращаетъ въ 0 производнаго, ибо каждый разъ будутъ въ немъ обращаться въ 0 всѣ слагаемыя, кромѣ того, въ которомъ пропущенъ множитель $(x-\alpha_1)$ или $(x-\alpha_2)$ и т.д. Если же для многочлена, положимъ, $x=\alpha_1=\alpha_2$, то и производный обращается въ 0, и $x-\alpha_1$ у него выносится за скобку, но только въ первой степени, тогда какъ въ самомъ многочленѣ $(x-\alpha_1)$ войдетъ два раза, т.е. въ квадратѣ; если при корнѣ равенъ между собой

. . .

то в произведении будет множителем $(x-\alpha_i)^2$, т.е. оно имеет два равных корня, тогда как сам многочлен имеет этот же корень три раза. Одним словом, теорему эту можно формулировать еще так: корни данной функции входят и корнями производной ее, но с кратностью на единицу меньшей; так что если

$$f(x) \equiv (x-\alpha_1)^{p_1}(x-\alpha_2)^{p_2}\ldots\ldots(x-\alpha_n)^{p_n},$$

то $f'(x)$ имеет множителем

$$(x-\alpha_1)^{p_1-1}(x-\alpha_2)^{p_2-1}\ldots\ldots(x-\alpha_n)^{p_n-1}$$

На основании этой теоремы мы рассуждаем так. Чтобы многочлен имел хотя один кратный корень, необходимо, чтобы он имел общий корень с первым своим производным, а условие существования общих корней у двух многочленов, как мы знаем, есть равенство нулю их результанта. Этот результант и называется в данном случае дискриминантом. Если

$$f(x) \equiv a_0x^m + a_1x^{m-1} \ldots\ldots + a_m$$

и стд.

$$f'(x) \equiv ma_0x^{m-1} + (m-1)a_1x^{m-2} \ldots\ldots + a_{m-1}$$

то детерминант $f(x)$ есть

$$Dis \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots a_m & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & a_0 & a_1 \ldots\ldots a_{m-1} & a_m \; 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 & a_0 \; a_1 \ldots\ldots a_m & 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots & & & \\ & & a_0 \; a_1 \ldots\ldots a_m & \\ ma_0 & (m-1)a_1 & a_{m-1} \; 0 \ldots\ldots 0 & \\ 0 & ma_0 \ldots\ldots a_{m-1} & & \\ 0 \ldots 0 & ma_0 \ldots\ldots a_{m-1} & & \\ \ldots\ldots & & & \\ 0 \ldots\ldots 0 & ma_0 \ldots\ldots a_{m-1} & & \end{vmatrix} \quad (2m-1)$$

Так как многочлен $f(x)$ – $m^{\text{ой}}$ степени, а производная

$m-1$-ой, то порядокъ д-та будетъ $m+m-1=2m-1$, но степень его относительно другихъ перемѣнныхъ, входящихъ въ его коэффиціенты, не $m(m-1)$, какъ мы ожидали бы по теоремѣ Безу, а только $(m-1)(m-1)$, т.е. $(m-1)^2$. Это будетъ понятно, если мы обратимъ вниманіе на слѣдующее обстоятельство. Если мы приведемъ многочленъ $f(x)$ къ однородному виду, т.е. замѣнимъ x черезъ $\frac{x}{y}$, то получимъ многочленъ

$$f(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \dots + a_{m-1} x y^{m-1} + a_m y^m$$

отъ котораго, какъ извѣстно, можно взять два производныхъ многочлена по x и по y, которые оба будутъ степени $m-1$ и связаны между собой такой зависимостью

$$x \cdot f'_x + y f'_y = m f(x)$$

См. 161.

Понятно, что всякая величина, обращающая въ 0 одновременно $f(x)$ и $f'_x(x)$ (т.е. всякій общій корень) будетъ обращать въ нуль и f'_y и наоборотъ: всякій общій корень f'_x и f'_y есть въ тоже время корень $f(x)$; слѣд. можно искать не условіе согласіе согласія $f(x)$ и $f'(x)$, а условіе согласія f'_x и f'_y, которые оба $m-1$-ой степени и результантъ которыхъ будетъ, конечно, степени $(m-1)^2$.

NB

Можно выяснить это обстоятельство еще другимъ путемъ. Если $f(x)$ и f'_x имѣютъ общій корень, то этотъ же корень имѣетъ конечно и функція $\varphi(x)$, если она есть линейное сочетаніе данныхъ двухъ, если, напр. $\varphi(x) = mf(x) - x f'_x$.

$$\begin{array}{l|l} f(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots\dots + a_m & m \\ f'(x) \equiv m a_0 x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2} + \dots\dots + a_{m-1} & x \end{array}$$

$$= mf(x) - x f'_x = a_1 x^{m-1} + 2a_2 x^{m-2} + \dots + (m-1) A_{m-1} x + m A_m$$

...очленъ $\varphi(x)$, какъ видимъ, степени $m-1$-ой, а если

мы сможем искать общій корень у него съ производными вмѣсто него, чтобы искать ихъ у производнаго съ функціей, то результантъ (въ нашемъ случаѣ дискриминантъ) будетъ степени $(n-1)^2$.

Посмотримъ теперь, какъ выражается дискриминантъ чрезъ корни даннаго многочлена. Припомнимъ, что первая производная многочленъ такъ выражается чрезъ корни даннаго:

$$\begin{aligned} f'(x) \equiv\ & a_0(-)(x-\alpha_2)\dots\dots(x-\alpha_n) + \\ & + a_0(x-\alpha_1)(-)\dots\dots(x-\alpha_n) + \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots\dots(x-\alpha_{n-1})(-). \end{aligned} \qquad (A)$$

и посмотримъ, къ чему приведетъ насъ допущеніе, что многочленъ $f(x)$ имѣетъ равные корни. Подставимъ въ выраженіе (A) сначала одинъ корень даннаго многочлена $f(x)$ — положимъ — α_1; тогда всѣ слагаемыя, кромѣ одного, обратятся въ нуль и

$$f'(\alpha_1) = a_0(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\dots\dots(\alpha_1-\alpha_n)$$

Подставляя поочередно остальные корни въ тоже выраженіе (A), аналогично найдемъ:

$$f'(\alpha_2) = a_0(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\dots\dots(\alpha_2-\alpha_n)$$

$$f'(\alpha_3) = a_0(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)\dots\dots(\alpha_3-\alpha_n)$$

и т.д.

Очевидно, если многочленъ $f(x)$ имѣетъ два или нѣсколько равныхъ корней, то одна (въ случаѣ 2-хъ корней) или нѣсколько (въ случаѣ нѣсколькихъ) изъ величинъ $f'(\alpha_1)$, $f'(\alpha_2)$ и т.д. обратится непремѣнно въ 0, т.е. произведеніе ихъ

$$f'(\alpha_1)\cdot f'(\alpha_2)\ f'(\alpha_3)\dots\dots f'(\alpha_n)$$

и итакъ дискриминантъ даннаго многочлена какъ равенство нулю этого произведенія обуслов

существованіе равныхъ корней въ $f(x)$. Всматриваясь въ составъ этого произведенія, не трудно видѣть, что каждая разность $(\alpha_1-\alpha_2)$ и проч. повторится въ немъ два раза {одинъ разъ $(\alpha_1-\alpha_2)$, а другой разъ $(\alpha_2-\alpha_1)$}, только съ противоположными знаками, а слѣдов. дискриминантъ представится въ видѣ произведенія квадратовъ разностей корней:

$$
\begin{aligned}
Dis \equiv a_0^n (\alpha_1-\alpha_2)^2 (\alpha_1-\alpha_3)^2 \ldots\ldots\ldots (\alpha_1-\alpha_m)^2 \times \\
\times (\alpha_2-\alpha_3)^2 (\alpha_2-\alpha_4)^2 \ldots\ldots (\alpha_2-\alpha_m)^2 \times \\
\times (\alpha_3-\alpha_4)^2 \ldots\ldots (\alpha_3-\alpha_m)^2 \times \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots \\
\times (\alpha_{m-1}-\alpha_m)^2
\end{aligned}
$$

Вопросъ о знакѣ дискриминанта въ этомъ случаѣ, конечно, не имѣетъ значенія.

Отчетъ

Высшая алгебра издавалась въ 100 экз.
Съ 81-ти подписчиковъ получено — 80 р.

Истрачено:

мелкіе расходы	1 р
Въ литографію по 2 р за листъ за 11 листовъ	— 22 р
Бумага	— 8 р
Переписчику	— 25 р
Итого	— 56 р

...ся 24 р и деньги которыя будутъ получены продажи остальныхъ экз., пойдутъ на ...ій будущаго года

From the books of
Joseph J. Smorichevsky
Vancouver, B.C., Canada, 1986

90 22991
Vysshaia algebra /
Stanford University Libraries
3 6105 043 166 375

CECIL H. GREEN LIBRARY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(650) 723-1493
grncirc@sulmail.stanford.edu
All books are subject to recall.

DATE DUE